Конспект лекций по математической логике за II семестр

Лектор: Д. Е. Пальчунов.

По материалам лекций 2003–2004 гг.

Под редакцией Таранцова А., Таранцовой У., Чирухина О.

Этот документ распространяется на условии «как есть», без предоставления каких-либо гарантий. Разрешается свободное копирование данного документа в личных целях. По вопросам массового распространения и внесения изменений обращайтесь к авторам.

Версия 0.9.5

Оглавление

§ 17. Секвенциональное исчисление предикатов . . . 3

§ 18. Теорема о существовании модели . . . 7

§ 19. Исчисление предикатов гильбертовского типа . . . 12

§ 20. Кодировка машин Тьюринга . . . 14

§ 21. Универсальные функции . . . 18

§ 22. Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества . . . 22

§ 23. Теорема Гёделя о неполноте . . . 24

§ 24. Аксиоматизируемые классы . . . 27

§ 25. Элементарные подсистемы . . . 29

§ 26. Теорема Эрбрана . . . 33

Секвенциональное исчисление предикатов § 17

17-6 *Определение* Пусть φ — формула. Тогда

$$\varphi(t_1,\ldots,t_n) \rightleftharpoons \left[\varphi(s_1,\ldots,s_n)\right]^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

17-10 *Определение 17.1*

(а) аксиомы

(1) $\varphi \vdash \varphi$;

17-12 **(2)** $\vdash \forall x\ (x = x)$;

(3) $\vdash \forall x\ \forall y\ \big((x = y) \to (y = x)\big)$;

17-14 **(4)** $\vdash \forall x\ \forall y\ \forall z\ \Big(\big((x = y)\ \&\ (y = z)\big) \to \big(x = z\big)\Big)$;

17-17 **(5)** $(t_i = q_i),\quad \varphi(t_1,\ldots,t_n) \vdash \varphi(q_1,\ldots,q_n)$.

(б) правила вывода

17-22 **(1)** $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi\ \&\ \psi}$;

17-23 **(2)** $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi\ \&\ \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$;

17-24 **(3)** $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi\ \&\ \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$;

17-25 **(4)** $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$;

17-26 **(5)** $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$;

17-27 **(6)** $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \xi;\ \Gamma, \psi \vdash \xi;\ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \xi}$;

17-28 **(7)** $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$;

17-29 **(8)** $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$;

17-30 **(9)** $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$;

17-31 **(10)** $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \neg\omega}{\Gamma \vdash}$;

17-32 **(11)** $\dfrac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \xi}$;

17-33 **(12)** $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$;

17-34 **(13)** $\dfrac{\Gamma \vdash \omega}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}\quad x \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$;

17-35 **(14)** $\dfrac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\ \varphi(x) \vdash \psi}\quad \varphi(t) = \left[\varphi(x)\right]^{x}_{t}$;

17-37 **(15)** $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi(x)}$;

17-38 **(16)** $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \exists x,\ \varphi \vdash \psi}\quad x \notin \mathsf{FV}(\Gamma \cup \{\varphi\})$.

17-43 *Определение 17.2* *Доказательство, доказательство секвенции, дерево секцвенций, дерево вывода, допустимое правило вывода, производное правило вывода* определяются аналогично соответствующим понятиям исчисления высказываний (ИВ).

Предложение 17.3 Секвенция доказуема $\Longleftrightarrow$ $\exists$ дерево вывода, заканчивающееся на эту секвенцию. 17-49

► (Упражнение.) ◄ 17-52

Замечание 17.4 **(а)** Если секвенция получена подстановкой в секвенцию, доказуемую в СИВ, вместо пропозициональной переменной формулы предикатов, то полученная секвенция доказуема в СИП. 17-56

(б) Правила вывода, допустимые в ИВ, допустимы в ИП. 17-60

► Все правила вывода в ИВ совпадают с правилами вывода в ИП. (Упражнение.) ◄ 17-63

Предложение 17.5 Следующие правила вывода являются производными в ИП: 17-65

(а) $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)}{\Gamma \vdash \varphi(x)}$; 17-69

(б) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \mathbin{\&} \xi) \vdash (\psi \mathbin{\&} \xi)}$; 17-70

(в) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \mathbin{\&} \psi) \vdash (\xi \mathbin{\&} \psi)}$; 17-71

(г) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\omega \vee \xi) \vdash (\psi \vee \xi)}$; 17-72

(д) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \vee \varphi) \vdash (\xi \vee \psi)}$; 17-73

(е) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\neg\varphi \vdash \neg\psi}$; 17-74

(ж) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \to \varphi) \vdash (\xi \to \psi)}$; 17-75

(з) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \to \xi) \vdash (\psi \to \xi)}$; 17-76

(и) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\forall x\, \varphi \vdash \forall x\, \psi}$; 17-77

(к) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\, \varphi \vdash \exists x\, \psi}$. 17-78

Следствие 17.6 Пусть $\varphi_1 \equiv \psi_1$, $\varphi_2 \equiv \psi_2$, тогда: 17-82

(а) $(\varphi_1 \mathbin{\&} \varphi_2) \equiv (\psi_1 \mathbin{\&} \psi_2)$; 17-85

(б) $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\psi_1 \vee \psi_2)$;

(в) $(\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2)$; 17-87

(г) $\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1$;

(д) $\forall x\, \varphi_1 \equiv \forall x\, \psi_1$; 17-89

(е) $\exists x\, \varphi_1 \equiv \exists x\, \psi_1$.

Теорема 17.7 *о замене* Пусть $\varphi \equiv \varphi_1$, ψ_1 получена из ψ заменой одного из вхожде- 17-93
ний формулы φ на φ_1. Тогда $\psi \equiv \psi_1$.

17-98 ► Индукцией по длине n — длине ψ ($n = \ln \psi$).

База индукции. Если $n < \ln \varphi$, то $\psi_1 = \psi \Rightarrow \psi_1 \equiv \psi$. Если $n = \ln$ phi, то:

17-102 **(1)** $\varphi \neq \psi \implies \varphi$ не входит в $\psi \implies \psi_1 = \psi \Rightarrow \psi_1 \equiv \psi$;

(2) $\psi = \varphi \implies \psi_1 = \varphi_1 \implies \psi_1 \equiv \psi$.

17-105 *Индукционный переход.* $n > \ln \varphi$, поэтому $\psi = (\psi' \mathbin{\&} \psi'')$ или $\psi = (\psi' \vee \psi'')$ или $\psi = (\psi' \to \psi'')$ или $\neg\psi'$ или $\forall x\ \psi'$ или $\exists\, x\ \psi'$; $\ln \psi' < n$ и $\ln \psi'' < n$.

17-110 Обозначим через ψ_1' и ψ_1'' результат замены φ на φ_1 в формулах ψ' и ψ'', если таковая замена имела место. Тогда $\psi' \equiv \psi_1'$ и $\psi'' \equiv \psi_1''$. Значит $\psi \equiv \psi_1$ по следствию 17.6. ◄

17-117 *Определение 17.8* $\Gamma \vdash \varphi$ *тождественно истинна*, если для $\forall$ модели $\mathfrak{A} \in K_\sigma(\Gamma \cup \{\varphi\})$, для $\forall$ означивания переменных γ: $\mathrm{FV}(\Gamma \cup \{\varphi\}) \to \left|\mathfrak{A}\right|$ выполняется

$$\forall \psi \in \Gamma\ \ \mathfrak{A} \models \psi[\gamma] \quad \implies \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

$\Gamma \vdash$ *тождественно истинна*, если для $\forall$ модели $\mathfrak{A} \in K_\sigma(\Gamma \cup \{\varphi\})$, для $\forall$ означивания переменных γ: $\mathrm{FV}(\Gamma \cup \{\varphi\}) \to \left|\mathfrak{A}\right|$ выполняется

$$\exists \psi \in \Gamma\ \ \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma].$$

$\vdash \varphi$ *тождественно истинна* (т. и.), если для $\forall$ модели $\mathfrak{A} \in K_\sigma(\Gamma \cup \{\varphi\})$, для $\forall$ означивания переменных γ: $\mathrm{FV}(\Gamma \cup \{\varphi\}) \to \left|\mathfrak{A}\right|$ выполняется

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

17-136 *Замечание 17.9* $\vdash \varphi$ т. и. $\iff$ φ т. и.

17-140 *Теорема 17.10* Если секвенция доказуема, то она тождественно истинна.
17-143 *о корректности* ►

17-146 *Лемма 17.11* Аксиомы тождественно истинны.

► (Упражнение.) ◄

17-151 *Лемма 17.12* Если $S_1, \ldots, S_n$ т. и. ($n \in \{1, 2, 3\}$) и $\frac{S_1, \ldots, S_n}{S}$ — правило вывода, то S т. и.

17-156 ► (Упражнение.) ◄

17-159 Пусть S доказуема, тогда $\exists$ дерево вывода D вида $\frac{\dots}{S}$.
Пусть $n = h(D)$. Индукция по n:

17-161 **(1)** Пусть $n = 1$, тогда S — аксиома, значит т. и. по 17.11.

(2) $< n \to n$: пусть $D = \frac{D_1; \ldots; D_n}{S}$; D_i — деревья, $D_i = \frac{\dots}{S_i}$, значит $h(D_i) < n$. Следовательно, по индукции S_i — т. и. $\frac{S_1; \ldots; S_n}{S}$ — правило вывода, значит, S — т. и. (по 17.12). ◄

17-170 ***Предложение 17.13*** Имеют место следующие тождества ($x \notin \mathsf{FV}(\xi)$):

(1) $\forall x\, \xi \equiv \xi$; 17-172

(2) $\exists x\, \xi \equiv \xi$;

(3) $\forall x\, \forall y\, \varphi(x, y) \equiv \forall y\, \forall x\, \varphi(x, y)$; 17-174

(4) $\exists x\, \exists y\, \varphi(x, y) \equiv \exists y\, \exists x\, \varphi(x, y)$;

(5) $\neg\exists x\, \varphi(x) \equiv \forall x\, \neg\varphi(x)$; 17-176

(6) $\neg\forall x\, \varphi(x) \equiv \exists x\, \neg\varphi(x)$;

(7) $\big(\forall x\, \varphi(x)\big)\ \&\ \big(\forall x\, \psi(x)\big) \equiv \forall x\, \big(\varphi(x)\ \&\ \psi(x)\big)$; 17-178

(8) $\big(\exists x\, \varphi(x)\big)\ \&\ \big(\exists x\, \psi(x)\big) \equiv \exists x\, \big(\varphi(x)\ \&\ \psi(x)\big)$;

(9) $\big(\forall x\, \varphi(x)\ \&\ \xi\big) \equiv \forall x\, \big(\varphi(x)\ \&\ \xi\big)$; 17-182

(10) $\exists x\, \big(\varphi(x)\ \&\ \xi\big) \equiv \exists x \big(\varphi(x)\ \&\ \xi)$; 17-184

(11) $\xi\ \&\ \big(\forall x\, \varphi(x)\big) \equiv \forall x\, \big(\xi\ \&\ \varphi(x)\big)$; 17-185

(12) $\xi\ \&\ \big(\exists x\, \varphi(x)\big) \equiv \exists x\, \big(\xi\ \&\ \varphi(x)\big)$; 17-186

(13) $\big(\forall x \varphi(x)\big) \vee \xi \equiv \forall x\, \big(\varphi(x) \vee \xi\big)$; 17-187

(14) $\big(\exists x \varphi(x)\big) \vee \xi \equiv \exists x\, \big(\varphi(x) \vee \xi\big)$; 17-188

(15) $\xi \vee \big(\forall x\, \varphi(x)\big) \equiv \forall x\, \big(\xi \vee \varphi(x)\big)$; 17-189

(15) $\xi \vee \big(\exists x\, \varphi(x)\big) \equiv \exists x\, \big(\xi \vee \varphi(x)\big)$; 17-190

(17) $\forall x\, \varphi(x) \equiv \forall y\, \varphi(y)$; 17-191

(18) $\exists x\, \varphi(x) \equiv \exists y\, \varphi(y)$.

► (Упражнение.) ◄ 17-194

Определение 17.14 Говорят, что формула находится в *предварённой (пренексной) нормальной форме*, если она имеет вид 17-198

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\, \varphi(\overline{x}, \overline{y}),$$

где $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, φ бескванторная.

Теорема 17.15 (синтаксис) $\forall \varphi\, \exists \psi \equiv \varphi \quad | \quad \psi$ находится в предварённой НФ. 17-203

► Алгоритм приведения: 17-206

(1) Избавляемся от импликаций.

(2) С помощью 5 и 6 отрицание вносится под кванторы. 17-209

(3) С помощью 17, 18 переменные переобозначим так, чтобы разные переменные действовали по разным кванторам и каждая переменная имела либо только свободное, либо только связанное вхождение.

(4) С помощью 9–16 кванторы выносятся наружу. 17-213

В силу теоремы о замене, предложения 17.13 и транзитивности на каждом шаге получается формула, равносильная данной. Полученная формула — ПНФ. ◄

Теорема о существовании модели § 18

18-5 *Определение 18.1* Пусть σ — сигнатура, $T \subseteq F(\sigma)$, $\varphi \in F(\sigma)$. Тогда:

18-8 **(1)** $T \vdash \varphi$, если $\exists\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T \quad | \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ доказуема;

18-9 **(2)** $T \vdash$, если $\exists\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T \quad | \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ доказуема (множество T противоречиво);

18-11 **(3)** $T \nvdash$ (множество T непротиворечиво), если T не является противоречивым.

18-13 Пусть $T \subseteq S(\sigma)$. Тогда T — *теория* сигнатуры σ, если

$$\forall\, \varphi \in S(\sigma) \;\; T \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi \in T,$$

то есть множество предложений T является *дедуктивно замкнутым*.

18-17 Множество T *полно* в сигнатуре σ, если

$$\forall\, \varphi \in S(\sigma) \;\; \varphi \in T \vee \neg\varphi \in T.$$

18-20 Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ — *модель множества предложений* T ($\mathfrak{A} \models T$), если
$\forall\, \varphi \in T \;\; \mathfrak{A} \models \varphi$.

18-25 *Определение 18.2* *Элементарной теорией* модели $\mathfrak{A}$ называется

$$\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\sigma(\mathfrak{A})) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}\,.$$

18-29 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ *эквивалентны* ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{B})$, то есть $\forall\, \varphi \in S(\sigma) \;\; \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$.

18-33 Такие модели неразличимы с точки зрения свойств логики предикатов.

18-36 *Замечание 18.3* Элементарная теория модели $\mathfrak{A}$ является полной непротиворечивой теорией сигнатуры σ.

18-40 ► (Следите за обновлениями!) ◄

18-46 *Замечание 18.5* Для $T \subseteq S(\sigma)$ следующие условия эквивалентны:

18-47 **(1)** T противоречива;

(2) $\forall\, \varphi \in S(\sigma) \;\; T \vdash \varphi$;

18-49 **(3)** $\exists\, \varphi \in S(\sigma) \quad | \quad T \vdash \varphi$ и $T \vdash \neg\varphi$.

► (Следите за обновлениями!) ◄

18-54 *Следствие 18.6* Пусть $T = \mathsf{Th}(\sigma)$. Тогда $T \vdash \iff T = S(\sigma)$.

18-57 ► $T \vdash \iff \forall\,\varphi \in S(\sigma)\ \ T \models \varphi \iff \varphi \in T \iff T = S(\sigma)$,
т. к. $T \subseteq S(\sigma)$. ◄

18-63 ***Замечание 18.7*** Пусть $T \subseteq S(\sigma)$, T непротиворечиво и полно, тогда T — теория. (Полное непротиворечивое множество предложений данной сигнатуры является теорией этой сигнатуры.)

► Пусть $T \vdash \varphi$. Пусть $\varphi \notin T$, $\varphi \in S(\sigma)$. Тогда $\neg\varphi \in T$, следовательно 18-68
$\exists\,\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T \quad | \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$.⟪**To be continued**…⟫ ◄

Теорема 18.8 Пусть A, B бесконечны, $\|A\| \leq \|B\|$. Тогда $\|A \cup B\| = \|B\|$. 18-75

► (Упражнение.) ◄ 18-79

Теорема 18.9 Пусть A бесконечно, $A^* = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A\}$. 18-83
Тогда $\|A^*\| = \|A\|$.

► (Упражнение.) ◄ 18-86

Теорема 18.10 Пусть A — множество. Тогда $\exists$ кардинал $\alpha \quad | \quad \|\alpha\| = \|A\|$. 18-90

Замечание Если α — бесконечный кардинал, то α — предельный орди- 18-95
нал.

► Пусть $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$, тогда $\|\beta\| = \|\alpha\|$. ◄ 18-97

Определение 18.11 Пусть X — множество переменных, $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\gamma\colon X \to |\mathfrak{A}|$ — 18-103
интерпретация переменных X. Пусть $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\mathsf{FV}(\Gamma) \subseteq X$. Тогда говорят, что множество формул Γ *истинно* на модели $\mathfrak{A}$ при означивании переменных γ, и пишут $\mathfrak{A} \models \Gamma\,[\gamma]$, если

$$\forall\,\varphi \in \Gamma \quad \mathfrak{A} \models \varphi\,[\gamma].$$

Если $\mathsf{FV}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, т. е. $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, то 18-110

$$\varphi\,[\gamma] = \varphi(\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n)),$$

где $\gamma(x_i) \rightleftharpoons a_i \in \mathfrak{A}$.

Теорема 18.12 Любое непротиворечивое множество формул выполнимо, т. е. 18-115
о существовании модели имеет модель:

$$\Gamma \not\vdash \implies \exists\,\mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma)),\ \exists\,\gamma\colon \mathsf{FV}(\Gamma) \to |\mathfrak{A}| \quad \Big| \quad \mathfrak{A} \models \Gamma\,[\gamma].$$

Лемма 18.13 $\Gamma' \not\vdash$. 18-121

Лемма 18.14 U — дерево вывода. При γ⟪**???**⟫ аксиомы, правила вывода 18-125
сохраняются.

Лемма 18.15 T^* — теория Хенкина для σ^*, т. е. выполнено: 18-130
Хенкина

(а) T^* непротиворечива; 18-132

(б) $\forall\,\varphi \in S(\sigma^*)\ \ \varphi \in T^*$ либо $\neg\varphi \in T^*$, т. е. T^* полно;

(в) $\varphi \in S(\sigma)$, 18-135

$T^* \models \varphi \implies \varphi \in T^*$, т. е. T^* полно;

18-136 **(г)** $(\varphi \mathbin{\&} \psi) \in T^* \iff \varphi \in T^*$ и $\psi \in T^*$;

(д) $(\varphi \vee \psi) \in T^* \iff \varphi \in T^*$ или $\psi \in T^*$;

18-138 **(е)** $(\neg\varphi) \in T^* \iff \varphi \notin T^*$;

(ж) $(\varphi \to \psi) \in T^* \iff$ если $\varphi \in T^*$, то $\psi \in T^*$;

18-140 **(з)** $\exists\, x\, \psi(x) \in T^* \iff \exists\, c \in C \mid \varphi(c) \in T^* \iff$
$\Leftrightarrow$
$\exists$ замкнутый терм $t \in T(\sigma^*)$, т. е. $\mathsf{FV}(t) = \emptyset \mid \psi(t) \in T^*$;

18-143 **(и)** $\forall\, x\, \psi(x) \in T^* \iff \forall\, c \in C \mid \varphi(c) \in T^* \iff$
$\Leftrightarrow$
$\forall$ замкнутых термов $t \in T(\sigma^*)$ $\psi(t) \in T^*$.

18-147 ***Лемма 18.16*** Пусть $U \cup \{\varphi\} \subseteq S(\sigma)$, $c \in G(\varphi)$, $c \notin G(U)$; $U, \varphi \vdash$ доказуема. Тогда $U, \left[\varphi\right]_x^c \vdash$ доказуема.

18-152 ► (Упражнение.) ◄

18-156 ***Определение*** Логика предикатов без равенства — это:

18-157 **(1)** В определении формул исключается пункт равенства термов.

18-158 **(2)** В аксиомах ИП исключаются аксиомы с равенством.

Мы можем рассматривать логику предикатов без равенства и вводить равенство как внелогический символ, т. е. как обычный двухместный предикат.

18-165 ***Лемма 18.17*** $\mathfrak{A}^* \models T^* \iff \forall\, \varphi \in T^*$
$\mathfrak{A} \models \varphi$.

18-169 ***Замечание 18.18*** $t^{\mathfrak{A}^*} = t$.

18-173 ***Следствие 18.19*** Пусть $t \in T(\sigma^*)$, $t = t(x_1, \ldots, x_n)$; $q_1, \ldots, q_n \in T(\sigma^*)$, $\mathsf{FV}(q_i) = \emptyset$. Тогда $t^{\mathfrak{A}^*}(q_1, \ldots, q_n) = t(q_1, \ldots, q_n)$.

18-179 ***Определение: сигнатурное объединение*** Модель $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \mathfrak{A}^*/\sigma$ — это та же самая модель σ, в которой мы забыли про все сигнатурные символы из множества $\sigma^* \setminus \sigma$. Означивание то же самое.

18-185 ***Лемма 18.20*** Для $\forall\, t, q, S, t_i, q_i \in T(\sigma)$ выполняется:

18-187 **(а)** $\vdash t = t$;

(б) $t = t \vdash$;

18-189 **(в)** $t = q \mathbin{\&} q = s \vdash t = s$;

(г) $t_1 = q_1, \ldots, t_n = q_n \vdash \left[s\right]_{t_1,\ldots,t_n}^{x_1,\ldots,x_n} = \left[s\right]_{q_1,\ldots,q_n}^{x_1,\ldots,x_n}$;

18-192 **(д)** $t_1 = q_1, \ldots, t_n = q_n, \left[\varphi\right]_{t_1,\ldots,t_n}^{x_1,\ldots,x_n} \vdash \left[\varphi\right]_{q_1,\ldots,q_n}^{x_1,\ldots,x_n}$.

18-197 *Лемма 18.21* Пусть $t \in T(\sigma)$, $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$. Тогда $\exists\, c \in C \quad | \quad (t = c) \in T^*$.

Определение 18.22 Пусть $e, s \in C$. Тогда $e \sim s \iff (e = s) \in T^*$. 18-202

Лемма 18.23 $\sim$ — отношение эквивалентности. 18-206

Определение 18.24: модель $A = C/{\sim} = \{[c] \mid c \in C\}$. 18-210
$\mathfrak{A}^* = \langle A; \sigma^* \rangle$.

Выводимость на модели $\mathfrak{A}^*$: 18-213

(1) для $\forall\, p^n \in \sigma^*$, $c_1, \ldots, c_n \in C$:
$$\mathfrak{A}^* \models p([c_1], \ldots, [c_n]) \iff p(c_1, \ldots, c_n) \in T^*;$$

(2) для $\forall\, f^n \in \sigma^*$: 18-216
$$f^{\mathfrak{A}^*}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c] \iff (f(c_1, \ldots, c_n) = c) \in T^*;$$

(3) для $\forall\, d \in \sigma^*$: 18-218
$$d^{\mathfrak{A}^*} = [c] \iff (d = c) \in T^*.$$

Лемма 18.25 Предыдущее определение корректно. 18-222

Лемма 18.26 Пусть $t \in T(\sigma^*)$, $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$. Тогда $f^{\mathfrak{A}^*} = c \iff (t = c) \in T^*$. 18-226

Лемма 18.27 Пусть $t, q \in T(\sigma^*)$, $\mathsf{FV}(t) = \mathsf{FV}(q) = \emptyset$. 18-231
Тогда $\mathfrak{A}^* \models (t = q) \iff (t = q) \in T^*$.

Лемма 18.28 Пусть $p^n \in T(\sigma^*)$; $t_1, \ldots, t_n \in \sigma^*$; $\mathsf{FV}(t_i) = \emptyset$. 18-236
Тогда $\mathfrak{A}^* \models p(t_1^{\mathfrak{A}^*}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}^*}) \iff p(t_1, \ldots, t_n) \in T^*$.

Лемма 18.29 Для $\forall\, \varphi \in S(\sigma^*)$ выполняется $\mathfrak{A}^* \models \varphi \iff \varphi \in T^*$. 18-241

Следствие 18.30 $\mathfrak{A}^* \models T^*$. 18-245

► $\varphi \in T^* \implies \mathfrak{A}^* \models \varphi$. ◄ 18-248

Определение 18.31 Пусть $\Gamma \subseteq F(\sigma)$. 18-252

Γ *совместно*, если $\exists\, \mathfrak{A} \in K(\sigma)\ \exists\, \gamma$: $\mathsf{FV} \to |\mathfrak{A}| \quad | \quad \mathfrak{A} \models \Gamma\,[\gamma]$. 18-254

Γ *локально совместно*, если $\forall$ локального $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ Γ_0 совместно.

Теорема 18.32 Мальцева о компактности Γ совместно $\iff$ Γ локально совместно. 18-261

► (Следите за обновлениями!) ◄ 18-264

Теорема 18.33 Гёделя о полносте Любая тождественно истинная формула доказуема. 18-268

► (Следите за обновлениями!) ◄ 18-270

Следствие 18.34 φ доказуема $\iff$ φ тождественно истинна. 18-274

18-276 ► **(⇒)**. φ доказуема $\implies$ φ тождественно истинна $\implies$ $\vdash \varphi$ доказуема (теорема о корректности) $\implies$ φ т. и.

18-281 **(⇐)**. Теорема о полноте. ◄

18-286 *Теорема 18.35* Секвенция S доказуема $\iff$ S тождественно истинна.

18-288 ► **(⇒)**. Теорема о корректности.

(⇐). Аналогично доказательству для СИВ. ◄

18-295 *Вывод* Синтаксис в точности равен семантике.

18-299 *Теорема 18.36 Мальцева о расширении* Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$; $\exists$ бесконечная $\mathfrak{B} \models \Gamma$; α — кардинал $\mathfrak{B} \in$ $\in K(\sigma)$. Тогда $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) \mid \mathfrak{A} \models \Gamma$,
$|\mathfrak{A}| \geq \alpha$.

18-305 *Следствие 18.37* Пусть $\mathfrak{A}$ бесконечна, α — кардинал.
Тогда $\exists \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \mid \|\mathfrak{B}\| \geq \alpha$.

18-310 *Предложение 18.38 о существовании нестандартных натуральных чисел* Скипнуто.

18-313 Скипнуто.

Скипнуто.

18-317 Скипнуто.

Исчисление предикатов гильбертовского типа § 19

Определение 19.1
аксиомы исчисления предикатов (ИП)

(1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ 19-5

(2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \xi)) \to (\varphi \to \xi))$

(3) $(\varphi \;\&\; \psi) \to \varphi$ 19-8

(4) $(\varphi \;\&\; \psi) \to \psi$

(5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \xi) \to (\varphi \to (\psi \;\&\; \xi)))$ 19-10

(6) $\varphi \to (\varphi \lor \psi)$

(7) $\psi \to (\varphi \lor \psi)$ 19-12

(8) $(\varphi \to \xi) \to ((\psi \to \xi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \xi))$

(9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$ 19-14

(10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$

(11) $\forall x\, \varphi \to \left[\varphi\right]_t^x$ 19-16

(12) $\left[\varphi\right]_t^x \to \exists x\, \varphi$ 19-17

аксиомы исчисления предикатов равенства (ИП=)

(13) $x = x$ 19-21

(14) $(x = y) \to (\left[\varphi\right]_x^z \to \left[z\right]_)^y$

правила вывода

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}\ \textbf{(MP)} \qquad \frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x\, \psi} \qquad \frac{\psi \to \varphi}{\exists \psi \to \varphi}$$ 19-25

(MP) — правило «modus ponens»; во всех правилах $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$ 19-32
(множеству свободных переменных φ).

Определение 19.2
доказательство формулы

Доказательством формулы φ называется такая последовательность формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$, что $\forall\, i \le n\ \varphi_i$ либо аксиома, либо получена из предыдущих однократным применением одного из правил вывода. 19-37

Если $\exists$ доказательство формулы φ, то формула φ называется *доказуемой*. Обозначение:
$\rhd\, \varphi$. 19-43

Определение 19.3
вывод из Γ

Выводом формулы φ из множества формул Γ называется последовательность $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ такая, что $\forall\, i \le n$
φ_i либо аксиома, либо $\varphi_i \in \Gamma$, либо φ_i получается из предыдущих однократным применением одного из правил вывода. 19-47

Если $\exists$ вывод формулы φ из множества формул Γ, то говорят, что φ *выводима* из множества формул Γ. Обозначение: $\Gamma \rhd \varphi$. 19-53

Гон ⟨⟨**Найти пункты 19.4–19.6** ⟩⟩ 19-58

Теорема 19.7 о дедукции Если $\Gamma \cup \varphi \rhd \varphi$, то $\delta \rhd (\varphi \to \psi)$. ⟨⟨**Гон!**⟩⟩ 19-62

19-68 *Следствие 19.8* Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \rhd \psi$, то выводимо 19-67

$$\rhd (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \ldots (\varphi_n \to \psi) \ldots)).$$

19-73 *Теорема 19.9* Если Γ конечно, то

19-75 **(а)** $\Gamma \rhd \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ доказуема;

(б) $\rhd \varphi \Longleftrightarrow \; \vdash \varphi$ доказуема.

Кодировка машин Тьюринга § 20

Предложение 20.1 Следующие функции правильно вычислимы: 20-5 20-6

(а) $O(x) = 0$; 20-7

(б) $S(x) = x + 1$;

(в) $I_n^m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$. 20-9

► (Упражнение.) ◄

Предложение ЧРФ $\subset$ ПВТ (правильно вычислимые по Тьюрингу функции). 20-14

Базовые машины Тьюринга

(А) (перенос нуля) 20-18

(Б$^+$) (правый сдвиг) 20-20

(Б$^-$) (левый сдвиг)

(В) (транспозиция) 20-22

(Г) (удвоение)

(Ц$_n$) (циклический сдвиг) 20-24

(К$_n$) (копирование)

(Л) (ликвидация) 20-26

(R) (вычитание единицы)

(S) (прибавление единицы) 20-28

Предложение 20.2 Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_n$ правильно вычислимы на МТ. Тогда функция $f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ правильно вычислима на машине Тьюринга. (Их местность согласована.) 20-32

► Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда: 20-36

$q_0 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 \overset{K_n}{\Rrightarrow}$

$q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 \overset{\text{Б}^+}{\Rrightarrow}$

$0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 \overset{g}{\Rrightarrow}$

$0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 1^{g(x_1, \ldots, x_n)} 0 \overset{\text{Б}^+}{\Rrightarrow} \ldots \Rrightarrow$

$0 1^{g_1(X)} 0 \ldots q_? 0 1^{g_n(X)} \overset{\text{Б}^- \ F}{\Rrightarrow}$

$q_0 0 1 f(g_1(x) \ldots g_n(x)) + 1 0 \ldots$

$H = {}_{i=1}^{n-1}(K_n (\text{Б}^+)^n g_i (\text{Б}^-)^n \text{Ц}_{n+1} \text{Б}^+) \cdot \text{Ц}_n (\text{Б}^-)^{n-1} F$. ◄

Предложение 20.3 Пусть f получена из g и h с помощью оператора примитивной рекурсии. Пусть g, h правильно вычислимы на МТ. Тогда f правильно вычислима на МТ. 20-53

► (Упражнение.) ◄ 20-58

Предложение 20.4 Пусть $f = \mu y\big[g(\overline{x}y) = 0\big]$. Если g правильно вычислима на МТ, то f правильно вычислима на МТ. 20-62

20-66 ► (Упражнение.) ◄

20-70 *Предложение 20.5* ЧРФ $\subset$ ПВТ.

► Индукция по построению ЧРФ. (Упражнение.) ◄

20-75 *Теорема 20.6: основная теорема арифметики* $\forall$ числа $n \in \mathbb{N}$
$\exists$ единственное разложение $n = p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$, где p_i — i-е простое число ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$). Если $n \neq 0$, то $x_n \neq 0$.

20-81 Это называется каноническим разложением натурального числа в произведение степеней простых сомножителей.

20-85 *Определение 20.7* Нумеруя кортежи $a_1, \ldots, a_n$, обозначим $\gamma(a_1, \ldots, a_n) = 2 \cdot \cdot p_1^{a_1} \ldots p_n^{a_n}$.

20-90 *Предложение 20.8* Пусть $A_1 = \{\gamma(S) \mid S \in \{0,1\}^*\}$. Обозначим $B \subseteq \mathbb{N}$, $\chi_B(x) = = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B, \\ 0, & \text{если } x \notin B, \end{cases}$ тогда χ_{A_1} — ПРФ.

20-96 χ_B называется *характеристической функцией* множества B. В таком случае множество B_χ называется примитивно рекурсивным множеством.

20-100 ► (Упражнение.) ◄

20-104 *Предложение 20.9* Следующие функции являются ПРФ:

20-106 **(1)** $L(n,a) \rightleftharpoons \begin{cases} \gamma(a\,\alpha), & \alpha \in \{0,1\}^*,\ \gamma(\alpha) = n,\ a \in \{0,1\} \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$

20-108 **(2)** $R(n,a) \rightleftharpoons \begin{cases} \gamma(\alpha\,a), & \alpha \in \{0,1\}^*,\ \gamma(\alpha) = n,\ a \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$

20-111 **(3)** $L(n) \rightleftharpoons \begin{cases} 2, & 2 = n = \gamma(0) \\ \gamma(\alpha), & \gamma(a\,\alpha) = n,\ a,\alpha \in \{0,1\}^* \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$

20-114 **(4)** $R(n) \rightleftharpoons \begin{cases} 2, & 2 = n = \gamma(0) \\ \gamma(\alpha), & \gamma(\alpha\,a) = n,\ a,\alpha \in \{0,1\}^* \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$

20-117 **(5)** $xy \rightleftharpoons \begin{cases} \gamma(\alpha\,\beta), & x = \gamma(\alpha),\ y = \gamma(\beta),\ \alpha,\beta \in \{0,1\}^* \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$

20-120 **(6)** $K(x) \rightleftharpoons \begin{cases} a+1, & x = \gamma(a\,\alpha),\ a,\alpha \in \{0,1\}^* \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$

20-123 **(7)** $k(x) \rightleftharpoons \begin{cases} a+1, & x = \gamma(\alpha\,a),\ a,\alpha \in \{0,1\}^* \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$

20-126 ► (Упражнение.) ◄

20-130 *Определение 20.10* Номером машинного слова $\alpha\, q_i\, j\, \beta$ ($\alpha j \beta \in \{0,1\}^*$) называют $\gamma(\alpha q_i j \beta) = 2^2 \cdot 3^i \cdot 5^j \cdot 7^{\gamma(\alpha)} \cdot 11^{\gamma(\beta)}$.

20-136 *Предложение 20.11: кодировка команд* Пусть $k_{ij} = q_i\, j \to q_s\, l\, \Delta$, где $\Delta = \{R, L, \emptyset\}$.

Тогда $\text{Б} = \begin{cases} 1, & \Delta = \emptyset, \\ 2, & \Delta = R, \\ 3, & \Delta = L. \end{cases}$ 20-140

Тогда $\gamma(k_{ij}) = p_c(i,j)$. ⟪**???**⟫ 20-144

Пусть П — программа на МТ. Тогда кодом будет называться $\gamma(\text{П}) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot \prod\limits_{k_{ij} \in \text{П}} \gamma(k_{ij})$, где $n = \max\{i \mid q_i \text{ входит в П}\}$.

Определение 20.12

(1) $t(x,y) \rightleftharpoons \begin{cases} \gamma(\alpha' q_l a \beta'), & \text{если } x = \gamma(\text{П}), \quad y = \gamma(\alpha q_i j \beta), \\ & \alpha\, q_i\, j\, \beta \xrightarrow{\text{П}} \alpha' q_l a' \beta, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$ 20-152

(2) $T(x,y,z,t) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = \gamma(\text{П}), \quad y = \gamma(\alpha q_i j \beta), \\ & \alpha\, q_i\, j\, \beta \underset{<t}{\xrightarrow{\text{П}}} \alpha q_0 0 1^{z+1} 0 \beta', \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$ 20-158

(3) $T^n(a, x_1, \ldots, x_n, z, t) \rightleftharpoons \begin{cases} 1 & \text{если } a = \gamma(\text{П}), \\ & q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 \underset{\le t}{\overset{\text{П}}{\Longrightarrow}} \\ & \underset{\le t}{\overset{\text{П}}{\Longrightarrow}} \alpha q_0 1^{z+1} 0 \beta, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$ 20-163

Предложение 20.13 t, T, T^n — ПРФ. 20-170

► (Упражнение.) ◄ 20-173

Теорема 20.14 о нормальной форме Клини Пусть $f(\overline{x})$ — ВМТ. Тогда $\exists$ ПРФ $g(\overline{x}, y)$ такая, что $f(\overline{x}) = l(\mu y\, [g(\overline{x}, y) = 0])$. 20-177

► Пусть f — ВМТ с номером П, $a \rightleftharpoons \gamma(\text{П})$, $g(\overline{x}, y) \rightleftharpoons T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y), r(y) - 1)$, $g(\overline{x}, y)$ — ПРФ. 20-181

Покажем, что $f(\overline{x}) = l\Big(\mu y\, [g(\overline{x}, y) = 0]\Big)$. 20-186

(1) Пусть $f(\overline{x})$ не определена. Т. к. П вычисляет f, то, начав со слова $q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0$, П не остановится. Значит, $\forall\, z, t\ T^n(a, x_1, \ldots, x_n, z, t) = 0 \implies \forall\, y\ T^n(a, \overline{x}, l(y), T(y)) = 0 \implies \forall\, y\ g(\overline{x}, y) = 1, \ne 0 \implies f(\overline{x})$ не определена. 20-188

(2) Пусть $f(\overline{x})$ определена. $f(\overline{x}) = z \implies q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} \underset{\le t \text{ шагов}}{\overset{\text{П}}{\Rightarrow}} \alpha q_0 0$ 20-195
$\implies T^n(a, \overline{x}, z, t) = 1$.

Если $T^n(a, \overline{x}, z_1, t_1) = 1$, то $z_1 = z$, $t_1 \ge t$. 20-200

Обозначим $y_0 \rightleftharpoons c(z,t)$, тогда по условию $g(\overline{x}, y_0) = 0$.

Докажем, что это y_0 будет минимальным. Пусть $g(\overline{x}, y_1) = 0$, $z_1 \rightleftharpoons l(y_1)$, $t_1 = r(y_1)$. Тогда $T^n(a, \overline{x}, z_1, t_1) = 1$, значит $z_1 = z$, $t_1 \ge t$. Отсюда $y_1 = c(z, t_1) \ge c(z,t) = y_0$, значит y_1 минимально. ◄ 20-204

Следствие 20.15 ВТ $\subseteq$ ЧРФ. 20-211

Следствие 20.16 Если f — ЧРФ, то $\exists$ ПРФ g такая, что $f(\overline{x}) = l(\mu y\,[g(\overline{x}, y) = 0])$. 20-215

20-219 ► Пусть f — ЧРФ. Тогда f — ПВТ, значит f — ВТ.
Следовательно $\exists\, g \mid f(\overline{x}) = l(\mu y\,[g(\overline{x}, y) = 0])$. ◄

20-225 *Следствие 20.17* Если f — ОРФ, то f может быть получена из простейших конечным числом применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии ⟪**, причем?**⟫ таким образом, что на каждом шаге будут получаться всюду определенные функции.

20-232 *Теорема 20.18: осн. о вычислимых функциях* ЧРФ = ВТ = ПВТ.

20-235 ► ЧРФ $\subseteq$ ПВТ $\subseteq$ ВТ $\subseteq$ ЧРФ. ◄

20-239 *Следствие 20.19* ОРФ = всюду определённые ВТ = всюду опред-ные ПВТ.

20-243 *Тезис Чёрча* Всякая интуитивно вычислимая функция является ЧРФ: ИВТ = ЧРФ.

Универсальные функции § 21

Определение 21.1 Пусть k — некоторое множество n-местных функций. 21-5

$f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — универсальная функция для K, если: 21-8

(1) $\forall m \in \mathbb{N} \quad f(m, x_1, \ldots, x_n) \in K$;

(2) $\forall g(x_1, \ldots, x_n) \in K \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad | \quad f(m, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$. 21-10

То есть $K = \{f(m, x_1, \ldots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$. 21-13

Следствие 21.2 K имеет универсальную функцию $\iff$ K счётно. 21-17

► ⟪**???**⟫ — взаимооднозначное отображение. (Упражнение.) ◄ 21-20

Следствие 21.3 Если K континуально, то $\neg\exists$ универсальной функции для K. 21-23

Следствие 21.4 Класс $K_n = \{f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ — частичные функции$\}$ не имеет универсальной функции. 21-28

Следствие 21.5 ПРФ, ОРФ, ЧРФ имеют универсальные функции. 21-32

► Известно, что ПРФ бесконечно, ЧРФ счётно, ЧРФ $=$ ПВТ. Т. к. 21-35

$$\|\text{ПВТ}\| \le \|\text{множество программ}\|,$$

а каждая программа — это конечный набор инструкций конечного языка, то множество программ счётно. ◄

Замечание 21.6 Пусть $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ взаимооднозначна, f универсальна для K. Тогда $f(h(x_0), x_1, \ldots, x_n)$ универсальна для K. 21-43

► $\mathbb{N} \underset{\text{вз. одн.}}{\xrightarrow{h}} N \underset{\text{вз. одн.}}{\xrightarrow{f}} K.$ 21-48

$\lambda x_0\, f(h(x_0), x_1, \ldots, x_n) = h \circ \lambda x_0\, f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. 21-51

⟪**???**⟫ ◄

Следствие 21.7 **(а)** Если K счётно, то K имеет континуум различных универсальных функций. 21-57

(б) ОРФ, ПРФ, ЧРФ имеют континуум различных универсальных функций. 21-60

Предложение 21.8 **(а)** $\neg\exists$ универсальной ПРФ для ПРФ^n; 21-64

(б) $\neg\exists$ универсальной ОРФ для ОРФ^n; 21-66

(в) $\neg\exists$ универсальной ЧРФ для ОРФ^n.

► Метод диагонализации. 21-69

(а) От противного. Пусть f — универсальная для ПРФ^n, f — ПРФ. Определим ПРФ $g(x_1,\dots,x_n) \rightleftharpoons f(x_1,x_1,x_2,\dots,x_n)+1$. Тогда $\exists\, m \in \mathbb{N} \ \mid\ \forall \overline{x}\ f(m,x_1,\dots,x_n) = g(x_1,\dots,x_n)$. Но тогда $f(m,\dots,m) = g(m,\dots,m) = f(m,\dots,m)+1$. Противоречие.

21-78 **(б)** Аналогично, только g получается ОРФ.

(в) От противного. Т. к. функция $f(x_0,x_1,\dots,x_n)$ определена для $\forall\, x_0$ (как универсальная функция для ОРФ^n), то она всюду определена, т. е. является ОРФ. А это противоречит пункту (б). ◄

21-86 *Теорема 21.9* ЧРФ^n имеет универсальную ЧРФ.

21-89 ► Обозначим $K = $ ЧРФ^n. Докажем, что универсальной для K явл-ся

$$f(x_0,\dots,x_1) \rightleftharpoons l\Big(\mu y\, \Big[\Big|T^n(x_0,\dots,x_n,l(y),r(y))-1\Big|\Big]\Big).$$

21-94 **(а)** Пусть $a \in \mathbb{N}$, тогда $f(a,x_1,\dots,x_n)$ — ЧРФ, значит $f \in K$.

(б) Пусть $g \in K$, тогда $g(\overline{x})$ — ЧРФ, а значит, g — ПВТ, то есть $\exists$ Π, вычисляющая g. Пусть $a \rightleftharpoons \gamma(\Pi)$. Тогда $g(x_1,\dots,x_n) = l\Big(\mu y\, \Big[\Big|T^n(a,\dots,x_n,l(y),r(y))-1\Big|\Big]\Big) = f(a,x_1,\dots,x_n)$. ◄

21-103 *Определение 21.10* $\varphi^2(x_0,x_1) = l\left(\mu y\left[\Big|T^2(x_0,x_1,l(y),r(y))-1\Big| = 0\right]\right)$.

21-108 *Следствие 21.11* $\varphi^2(x_0,x_1)$ универсальна для ЧРФ^1.

21-112 *Определение 21.12* $\varphi^n(x_0,x_1,\dots,x_n) = \varphi^2(x_0,c^n(x_1,\dots,x_n))$.

21-116 *Предложение 21.13* φ^{n+1} универсальна для ЧРФ^n.

21-119 ► Утверждение для φ^2, ЧРФ^1 доказано.

Пусть $n > 1$. Докажем, что φ^{n+1} — универсальная для ЧРФ^n.

21-124 **(а)** Пусть $a \in \mathbb{N}$, тогда $\varphi^{n+1}(a,x_1,\dots,x_n) = \varphi^2(a,c(x_1,\dots,x_n))$ — ЧРФ, значит φ^{n+1} — ЧРФ.

21-127 **(б)** Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — ЧРФ. Обозначим

$$g(y) \rightleftharpoons f(c_{n1}(y),\dots,c_{nn}(y)).$$

Т. к. g — ЧРФ, то $\exists\, a \in \mathbb{N} \ \mid\ \varphi^2(a,y) = g(y)$.

21-131 Тогда $\varphi^{n+1}(a,x_1,\dots,x_n) = \varphi^2(a,c_n(x_1,\dots,x_n)) = g(c(x_1,\dots,x_n)) = f(x_1,\dots,x_n)$. ◄

21-136 *Определение 21.14:*
21-139 *клиниВские скобочки*

$$[x,y] = c(l(x),c(r(x),y))$$
$$[x_1,\dots,x_n] = [[x_1,\dots,x_{n-1}],x_n]$$
$$[k]_{21} = c(l(k),l(r(k)))$$

21-141 $$[k]_{22} = r(r(k))$$
$$[k]_{n,1} = [[k]_{21}]_{n-1,1}$$

21-143 $$\vdots$$
$$[k]_{n,n-1} = [[k]_{21}]_{n-1,n-1}$$

21-145 $$[k]_{nn} = [k]_{22}$$

21-150 *Предложение 21.15* Все функции из предыдущего определения являются ПРФ.

21-152 ► (Упражнение.) ◄

Предложение 21.16 **(а)** $[[x_1, \dots, x_n]]_{nl} = x_l$; 21-156

(б) $[[k]_{n1}, \dots, [k]_{nn}] = k$;

► (Упражнение.) ◄ 21-159

Следствие [ ]: $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ взаимооднозначно. 21-163

Предложение 21.17 **(а)** $[c(x_0, x_1), x_2] = c(x_0, c(x_1, x_2))$; 21-167

(б) $c^n(c(x_1, x_2), x_2, \dots, x_{n+1}) = c^{n+1}(x_1, \dots, x_n)$;

(в) $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_m], x_{m+1}, \dots, x_n]$. 21-169

Определение 21.18: Клиневские уравнения функции $K^2(x_0, x_1) = \varphi^2(l(x_0), c(r(x_0), x_1))$ 21-173

$K^{n+1}(x_0, \dots, x_n) = K^n([x_0, x_1], x_2, \dots, x_n)$.

Предложение 21.19 $K^n(c(x_0, x_1), x_2, \dots, x_n) = \varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n)$. 21-177

► $l([a_0 \dots a_n]) = l([[a_0 \dots a_{n-1}]a_n]) = l([a_0 \dots a_{n-1}]) = \dots = l(a_0)$. 21-180

$r([a_0 \dots a_n]) = r([[a_0 \dots a_{n-1}]a_n]) = c(r([a_0, \dots, a_{n-1}]), a_n) = \dots = c(c(\dots c(r(a_0), a_1), a_2) \dots a_n) = c^{n+1}(r(a_0), a_1, \dots, a_n)$.

$K^{n+1}\Big(c(x_0, x_1, \dots, x_n)\Big) = K^2\Big([c(x_0, x_1), \dots], x_n\Big)$. ◄ 21-188

Теорема 21.20 K^{n+1} — универсальная ЧРФ для ЧРФ^n. 21-193

► 21-195

(а) K^{n+1} — ЧРФ по определению. $\forall\, a \in \mathbb{N}$ $K^{n+1}(a, x_1, \dots, x_n)$ — ЧРФ, т. е. $\in$ ЧРФ^n.

(б) Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — ЧРФ. Определим функцию 21-199

$$g(y, x_1, \dots, x_n) \rightleftharpoons f(x_1, \dots, x_n) + 0 \cdot y. \langle\langle \mathbf{???} \rangle\rangle$$

$g(y, \overline{x})$ — ЧРФ$^{n+1}$, поэтому $\exists\, a \in \mathbb{N}$ $\varphi^{n+2}(a, y, \overline{x}) = g(y, \overline{x})$. 21-202

Т. к. $\varphi^{n+2}(a, y, \overline{x}) = K^{n+1}(c(a, y), \overline{x})$, полагая $y = 0$, получаем $f(\overline{x}) = g(0, \overline{x}) = K^{n+1}(a, 0, \overline{x})$.

Введём обозначение $b = c(a, 0)$ — *клинивский номер*. Тогда $f(\overline{x}) = K^{n+1}(b, \overline{x})$. ◄ 21-208

Следствие 21.21 Любая ЧРФ имеет бесконечно много клиневских номеров. $c(a, 0)$, $c(a, 1)$, …, $c(a, m)$ — это всё номера. 21-213

Теорема 21.22: S-m-n-теорема $\forall\, m, n$ $\exists$ ПРФ $S^n_m(x_0, \dots, x_n)$ | $K^{n+m+1}(x_0, \dots, x_{m+n}) = K^{m+1}(S^n_m(x_0, \dots, x_n), x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$. 21-218

► $S^n_m(x_0, \dots, x_n) \rightleftharpoons [x_0, \dots, x_n]$. 21-223

$$\begin{aligned} K^{n+m+1}(x_0, \dots, x_{n+m}) &= K^{n+m}([x_0, x_1], \dots, x_{n+m}) = \\ &= K^{n+m-1}([[x_0, x_1], x_2], \dots, x_{n+m}) = \dots = \\ &= K^{m+1}([\dots[x_0, x_1], x_2] \dots x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \\ &= K^{m+1}([x_0, \dots, x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m}). \end{aligned}$$ ◄

Теорема 21.23 *о неподвижной точке* $\forall$ ЧРФ $h(x_1, \ldots, x_{n+1})$ $\exists$ ПРФ $g(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что 21-233

$$K^2(h(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)), y) = K^2(g(x_1, \ldots, x_n), y).$$

21-239 ► $K^2(h(x_1, \ldots, x_n, [z, z, x_1, \ldots, x_n]), y)$ — ЧРФ.

Тогда $\exists\, a \in \mathbb{N}$ ⟪**???**⟫ $= K^{n+3}(a, z, x_1, \ldots, x_n, y)$.

21-244 $g(x_1, \ldots, x_n) = [a, a, x_1, \ldots, x_n]$ — ПРФ.

$K^2(h(x_1, \ldots, x_n, [a, a, x_1, \ldots, x_n]), y) =$
$= K^{n+3}(a, a, x_1, \ldots, x_n, y) =$ (по S-m-n-теореме)
$= K^2([a, a, x_1, \ldots, x_n], y) = K^2(g(x_1, \ldots, x_n), y)$. ◄

21-252 ***Определение 21.24*** $\varkappa\colon \mathbb{N} \to \text{ЧРФ}^1, \quad \varkappa(h) = K^2(n, x)$.

21-256 ***Следствие 21.25*** $\forall$ ЧРФ h, $\exists\, x \in \mathbb{N} \quad | \quad \varkappa(h(x)) = \varkappa(x)$.

21-261 ***Теорема 21.26*** *Райса* Пусть $A \subseteq \text{ЧРФ}^1$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \text{ЧРФ}^1$.
Тогда $B = \{u \mid \varkappa(u) \in A\}$ не рекурсивно, т. е. χ_B — не ЧРФ.

21-266 ► От противного. Пусть χ_B — ПРФ.

$A \neq \emptyset \Longrightarrow B \neq \emptyset$; $\quad A \neq \text{ЧРФ}^1 \Longrightarrow B \neq \mathbb{N} \quad \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{N} \;\mid\; a \in B,\ b \notin B$.

21-272 По теореме о неподвижной точке $\exists\, n \mid \varkappa(n) = \varkappa(f(n))$.
Проверим, выполняется ли $\varkappa(n) \in A$:

21-274 **(1)** $\varkappa(n) \in A \implies n \in B,\ f(n) = b,\ b \notin B \implies \varkappa(n) =$
$= \varkappa(f(n)) \notin A$;

21-276 **(2)** $\varkappa(n) \notin A \implies n \notin B \implies f(n) = a \in B \implies \varkappa(n) =$
$= \varkappa(f(n)) \in A$.

21-279 Противоречие, значит, χ_B — не ПРФ. ◄

Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества § 22

Определение 22.1 Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ *рекурсивно (примитивно рекурсивно)*, 22-6
если $\chi_A(\overline{x})$ — ЧРФ (ПРФ).

Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ — *рекурсивно-перечислимое*, $A = \emptyset$ либо 22-9
$A = \rho_f \rightleftharpoons \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ для ПРФ f. если $\chi_A(\overline{x})$ — ЧРФ (ПРФ).

Предложение 22.2 Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$; $C \subseteq \mathbb{N}^l$; A, B, C — РМ (ПРМ). Тогда 22-14
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} = \mathbb{N}^k \setminus A$, $A \setminus B$, $A \times C$ — РМ (ПРМ).

► (Следите за обновлениями!) ◄ 22-20

Предложение 22.3 Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$; $B = \left\{C^k(\overline{x}) \;\middle|\; \overline{x} \in A\right\}$. Тогда A — РМ (ПРМ) 22-24
$\iff$ B — РМ (ПРМ).

► (Следите за обновлениями!) ◄ 22-27

Замечание Понятие РМ (ПРМ) — частный случай разрешимого множества ($\exists$ алгоритм для ответа на вопрос о принадлежности элемента), перечислимого множества ($\exists$ алгоритм перечисления). 22-31

Теорема 22.4 Поста A — РМ $\iff$ $A, \overline{A}$ — РПМ. 22-36

Предложение 22.5 Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$; $C \subseteq \mathbb{N}^l$; A, B, C — РПМ. Тогда $A \cup B$, 22-40
$A \cap B$, $A \times C$ — РПМ.

► (Упражнение.) ◄ 22-44

Теорема 22.6 об эквивалентных определениях РПМ Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Следующие утверждения эквивалентны: 22-48

(1) A — РПМ; 22-49

(2) $\exists$ ЧРФ $f \mid A = \rho_f$;

(3) $A = \emptyset$ 22-51
либо
$\exists$ ПРФ $f \mid A = \rho_f$;

(4) $\exists$ ПРМ $B \in \mathbb{N}^2 \mid A = \{x \mid \exists y\, (x, y) \in B\}$, где A — проекция ПРМ; 22-52

(5) $\exists$ РМ $B \in \mathbb{N}^2 \mid A = \{x \mid \exists y\, (x, y) \in B\}$, где A — проекция РМ; 22-54

(6) $\exists$ ЧРФ $f \mid A = \delta_f = \{x \mid f(x)$ — определена$\}$. 22-56

► (Следите за обновлениями!) ◄

Следствие 22.7 Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Тогда A — РПМ $\iff \exists\, f$ — ЧРФ $\mid A = \delta_f$. 22-61

22-65 ► (Следите за обновлениями!) ◄

22-69 *Предложение 22.8* Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$, $B \rightleftharpoons \left\{C^k(\overline{x}) \;\middle|\; \overline{x} \in A\right\}$.
Тогда A — РПМ $\iff$ B — РПМ.

22-72 ► (Упражнение.) ◄

22-76 *Теорема 22.9* Пусть $k \subseteq \mathbb{N}$. Тогда $\exists\, A \subseteq \mathbb{N}^k \;\mid\; A$ — РПМ, но A — не РМ.

22-79 ► (Следите за обновлениями!) ◄

22-83 *Теорема 22.10 о проекции* Пусть A — РПМ, $B = \{\overline{x} \mid \exists\, y(\overline{x}, y) \in A\}$.
Тогда B — РПМ.

22-86 ► (Следите за обновлениями!) ◄

22-90 *Следствие 22.11* Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$, A — РПМ; $B \subseteq \mathbb{N}^k$, $B = \{\overline{x} \mid \exists\, y(\overline{x}, y) \in A\}$.
Тогда B — РПМ.

22-94 ► (Упражнение.) ◄

22-98 *Теорема 22.12 о графике* Функция является ЧРФ $\iff$

$$G_f \rightleftharpoons \{(\overline{x}, y) \mid f(\overline{x}) = y\} \text{ — РПМ.}$$

22-101 ► (Следите за обновлениями!) ◄

Определение 22.13

22-105 Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$, тогда $\chi^*_A(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1, & \overline{x} \in A, \\ \text{неопр.}, & \overline{x} \notin A. \end{cases}$
называется *частичной характеристической функцией* множества A.

22-110 *Предложение 22.14* A — РПМ $\iff$ χ^*_A — ЧРФ.

22-113 ► (Следите за обновлениями!) ◄

22-117 *Теорема 22.15 о составном определении* Пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{N}^k$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$; пусть $A_1, \ldots, A_n$ — РПМ, $g_1(\overline{x}), \ldots, g_n(\overline{x})$ — ЧРФ. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g_1(\overline{x}), & \overline{x} \in A_1, \\ \quad\vdots & \\ g_n(\overline{x}), & \overline{x} \in A_n, \\ \text{неопред.} & \text{иначе,} \end{cases}$$

то f — ЧРФ.

22-125 ► (Следите за обновлениями!) ◄

Теорема Гёделя о неполноте § 23

Определение 23.1 $\Sigma_0 \rightleftharpoons <, \leq, +, *, S_1, 0>$ —сигнатура сигма, S_i — одноместная формула. $F(\Sigma_0)$ — множество формул сигнатуры Σ_0, $T(\Sigma_0)$ — множество термов сигнатуры Σ_0. 23-6

Определение 23.2 *Геделевая нумерация термов и формул сигнатуры Σ_0*

(1) $\gamma(0) \rightleftharpoons l(0, 1)$; $\gamma(v_i) \rightleftharpoons c(1, i)$ 23-10

(2) $\gamma(S(t)) \rightleftharpoons c(2, \gamma(t))$ 23-12

(3) $\gamma(t+q) \rightleftharpoons c(3, c(\gamma(t), \gamma(q)))$

(4) $\gamma(t*q) \rightleftharpoons c(4, c(\gamma(t), \gamma(q)))$ 23-14

(5) $\gamma(t=q) \rightleftharpoons c(5, c(\gamma(t), \gamma(q)))$

(6) $\gamma(t \leq q) \rightleftharpoons c(6, c(\gamma(t), \gamma(q)))$ 23-16

(7) $\gamma(\varphi \& \psi) \rightleftharpoons c(7, (\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$

(8) $\gamma(\varphi \vee \psi) \rightleftharpoons c(8, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$ 23-18

(9) $\gamma(\varphi \to \psi) \rightleftharpoons c(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$

(10) $\gamma(\neg\varphi) \rightleftharpoons c(10, c(\gamma(\varphi))$ 23-20

(11) $\gamma(\exists v_i\ \varphi) \rightleftharpoons c(11, c(i, \gamma(\varphi)))$

(12) $\gamma(\forall v_i\ \varphi) \rightleftharpoons c(12, c(i, \gamma(\varphi)))$ 23-22

Предложение 23.3 $\gamma\big(T(\Sigma_0)\big) \rightleftharpoons \{\gamma(t) \mid t \in T(\Sigma_0)\}$ — ПРМ, 23-26
$\gamma\big(F(\Sigma_0)\big) \rightleftharpoons \{\gamma(f) \mid f \in F(\Sigma_0)\}$ — ПРМ

► (Упражнение.) ◄ 23-29

Определение 23.4 Пусть $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$. Тогда: 23-33
X разрешимо, если $\gamma(X) \rightleftharpoons \{\gamma(p) \mid p \in X\}$ — РМ;
X перечислимо, если $\gamma(X)$ — РПМ.

$\nu\colon \mathbb{N} \to Y$ называется *нумерацией* множества Y; 23-38
Y разрешимо, если $\nu(Y)$ — РМ;
Y перечислимо, если $\nu(Y)$ — РПМ.

Замечание 23.5 Для $\forall\, n$ 23-43
$\forall\, a_0 \ldots a_n$
$\exists\, x = p_0^{a_0} \ldots p_n^{a_n}$ такой, что

$$\mathrm{ex}(0, x) = a_0, \quad \ldots, \quad \mathrm{ex}(n, x) = a_n.$$

Определение 23.6 $\pi_{\Sigma_0} \rightleftharpoons \{\varphi \in F(\Sigma_0) \mid \varphi$ — т. и$\}$ 23-49

Предложение 23.7 Множество π_{Σ_0} перечислимо. 23-53

► (Следите за обновлениями!) ◄ 23-56

Лемма 23.8 f — ОРФ (общерекурсивная функция. 23-60

23-62 ► (Упражнение.) ◄

23-66 *Следствие 23.9* **(1)** если $A \subseteq F(\Sigma_0)$, A перечислимо, тогда перечислимо
$$A' \rightleftharpoons \{\varphi \in F(\Sigma_0) \mid A \triangleright \varphi\}.$$

23-68 **(2)** если $A \subseteq S(\Sigma 0)$, A перечислимо, тогда перечислимо
$$A'' \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid A \triangleright \varphi\}.$$

(Если множество аксиом перечислимо, то и множество следствий перечислимо.)

23-72 ► (Следите за обновлениями!) ◄

23-76 *Предложение 23.10* $\gamma(S(\Sigma_0))$ — ⟪**???**⟫

23-78 ► (Упражнение.) ◄

23-82 *Теорема 23.11* Полная перечислимая теория сигнатуры Σ_0 является разрешимой.

23-84 ► (Следите за обновлениями!) ◄

23-89 *Определение 23.12 Формальная арифметика Пеано: система аксиом A_0*

(1) $\forall V_0 \ \neg(S(V_0) = 0)$

(2) $\forall V_0 \forall V_1 \ ((S(V_0) = S(V_1)) \to (V_0 \to V_1))$

23-91 **(3)** $\forall V_0 \ (V_0 + 0 = V_0)$

(4) $\forall V_0 \forall V_1 \ (V_0 + S(V_1) = S(V_0 + 1)$

23-93 **(5)** $\forall V_0 \ (V_0 * 0 = 0)$

(6) $\forall V_0 V_1 \ (V_0 * S(V_1)) = V_0 V_1 + V_0)$

23-95 **(7)** $\forall V_0 \ \neg(V_0 < 0)$

(8) $\forall V_0 \forall V_1 \ ((V_0 < S(V_1)) \to ((V_0 < V_1) \vee (V_0 = V_1)))$

23-97 **(9)** $\forall V_0 \forall V_1 \ (((V_0 < V_1) \cup (V_0 = V_1)) \to (V_0 < S(V_1)))$

(10) $\forall V_0 \forall V_1 \ (\neg(V_0 = V_1) \to ((V_0 < V_1) \vee (V_1 < V_0)))$

23-101 *Определение 23.13* $\underline{0} \rightleftharpoons 0$; $\underline{1} \rightleftharpoons 1$; $n+1 \rightleftharpoons S(n)$; $n \rightleftharpoons S(S(0)\ldots$(n раз)) — термы сигнатуры σ_0

23-106 *Определение 23.14* $F\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, горорят что f представляется в A_0, если $\exists \varphi(V_0, \ldots, V_{10}) \in F(\Sigma_0)$, что для $\forall n_0, \ldots, n_k \in N$, если $f(n_0, \ldots, n_k)$, то $A_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$, если $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) \neq =$, то $A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$

23-112 *Теорема 23.15* Каждая ОРФ представима в A_0.

23-115 ► (Следите за обновлениями!) ◄

23-119 ***Теорема 23.16*** *Геделя о неразрешимости* Пусть $T \rightleftharpoons S(\Sigma_0)$, T — теория, тогда если $A_0 \subset T$, то T неразрешима. Любая непротиворечивая теория, содержащая $\langle\langle$**???**$\rangle\rangle$ неразрешима.

► (Следите за обновлениями!) ◄ 23-122

Замечание 23.17 $\gamma(F(\Sigma_0))$ $\langle\langle$**???**$\rangle\rangle$ 23-126

► (Упражнение.) ◄ 23-128

Лемма 23.18 f — ПРФ 23-132

► (Упражнение.) ◄ 23-134

Теорема 23.19 *Черча о неразрешимости* Мнгожество теорем ИП_{Σ_0} неразрешимо. 23-138

► (Следите за обновлениями!) ◄ 23-140

Теорема 23.20 *Геделя о неполноте* $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \leq T$, T — перечислима и $T \not\vdash$. Тогда T не полна. 23-144

► (Следите за обновлениями!) ◄ 23-146

Следствие 23.21 $A \rightleftharpoons \{\gamma(\varphi) \mid A_0 \vdash \varphi\}$ — РПМ, но не РМ. 23-150

► (Следите за обновлениями!) ◄ 23-152

Аксиоматизируемые классы § 24

24-5 *Определение 24.1* $K_\sigma \rightleftharpoons K(\sigma) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ — модель сигнатуры $\sigma\}$ $K \subseteq K_\sigma$
$ThK \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\sigma) \mid K \models \varphi\}$ $K \models \varphi : \forall \mathfrak{A} \in K\ \mathfrak{A} \models \varphi$.

24-9 *Определение 24.2* $\Gamma \subseteq S(\gamma)$, $K(\Gamma) \rightleftharpoons K_\sigma(\Gamma) \rightleftharpoons \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \mathfrak{A} \models \Gamma\}$ $\mathfrak{A} \models \Gamma$: $\forall \varphi \in \Gamma\ \mathfrak{A} \models \varphi$.

24-14 *Определение 24.3* Класс K называется аксиоматизированным, если $K \subseteq K_\sigma$, $\exists \Gamma \subseteq S(\gamma)$, такое что $K = K(\Gamma)$

24-19 *Предложение 24.4* K — аксиоматизируем $\iff K = K(Th(K))$

24-22 ► (Следите за обновлениями!) ◄

24-26 *Предложение 24.5* Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда $K \subseteq K(Th(K))$.

24-28 ► (Следите за обновлениями!) ◄

24-32 *Предложение 24.6* Пусть $K = K(\Gamma)$, тогда $\Gamma \subseteq ThK$

24-34 ► (Следите за обновлениями!) ◄

24-38 *Следствие 24.7* Для каждого аксиоматизированного класса существует наибольшее по включению множество аксиом. Это в точности теория K.

24-41 *Предложение 24.8* Аксиоматизированный класс замкнут относительно элементарной эквивалентности, то есть если K — акс., $\mathfrak{A} \in K$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, , то $\mathfrak{B} \in K$.

24-45 ► (Следите за обновлениями!) ◄

24-49 *Предложение 24.9* Пусть Γ_1 , $\Gamma 2 \subseteq S(\sigma)$ K_1 , $K_2 \subseteq K_\sigma$

24-50 **(1)** $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \implies K(\Gamma_2) \subseteq K(\Gamma_1)$

(2) $K_1 \subseteq K_2 \implies ThK_2 \subseteq ThK_1$

24-53 ► (Следите за обновлениями!) ◄

24-57 *Замечание 24.10* В общем случае не верно что:

24-58 **(1)** $K = K(ThK)$

(2) $\Gamma = ThK(\Gamma)$

24-61 ► (Следите за обновлениями!) ◄

24-65 *Предложение 24.11* $\Gamma = ThK(\Gamma) \iff \Gamma$ — теория

► (Следите за обновлениями!) ◄ 24-67

Определение 24.12 K — конечно аксиоматизирован $\iff \exists$ конечная $\Gamma : K =$ 24-71
$= K(\Gamma)$.

Замечание 24.13 K конечно аксиоматизированно $\iff \exists\,\varphi : k = k(\{\varphi\})$. 24-74

► (Следите за обновлениями!) ◄ 24-77

Предложение 24.14 Если $K = K(\{\varphi\})$, то $\overline{K} \rightleftharpoons K_\sigma / K = K(\{\varphi\})$ 24-81

► (Следите за обновлениями!) ◄ 24-83

Следствие 24.15 K конечно аксиоматизированно $\iff \overline{K}$ конечно аксиомати- 24-87
зирован.

Теорема 24.16 Класс K конечно аксиоматизирован $\iff K$, $\overline{K}$ аксиомати- 24-90
зирован.

► (Следите за обновлениями!) ◄ 24-93

Элементарные подсистемы § 25

25-5 *Определение 25.1: подсистема* Пусть $\mathfrak{A},\ \mathfrak{B} \in K_\sigma,\ |\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$. Тогда $\mathfrak{A}$ — *подсистема* $\mathfrak{B}$ (обозначается $\mathfrak{A} \le \mathfrak{B}$), если $\forall\, p^n, f^n, c \in \sigma\ \ \forall\, a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$:

25-11 **(1)** $\mathfrak{A} \models p^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) \iff \mathfrak{B} \models p^{\mathfrak{B}}(\overline{a})$;

(2) $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$;

25-13 **(3)** $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

25-17 *Определение: элементарная подсистема* $\mathfrak{A}$ называется *элементарной подсистемой* $\mathfrak{B}$ (обозначается $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), если $\forall\, \varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)\ \ \forall\, a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

25-25 *Предложение 25.3* Пусть $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, тогда $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

25-28 ► $\varphi \in S(\sigma)$; $\psi(x) \le \psi\,\&\,(x = x)$; $a \in |\mathfrak{A}|$; $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \psi(a) \iff \mathfrak{B} \models \psi(a) \iff \mathfrak{B} \models \varphi \implies \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ◄

25-34 *Предложение 25.4* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$, тогда $\mathfrak{A} \le \mathfrak{B} \iff$
$\iff \forall$ бескванторной $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$, $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{A}$ выполняется $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

25-40 ► **($\Rightarrow$)**. Пусть $\forall$ бескванторной формулы φ выполняется. Покажем что $\mathfrak{A} \le \mathfrak{B}$.
$p^n, f^n, c \in \sigma$; $a_1, \dots, a_n,\ d \in \mathfrak{A}$; $p^n(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma) \implies$
$\mathfrak{A} \models p(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models p(a_1, \dots, a_n)$;
$f(x_1, \dots, x_n) = y \in F(\sigma) \implies$
$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$;
Пусть $d = c^{\mathfrak{A}}$, тогда формула $(c = x) \in F(\sigma) \implies \mathfrak{A} \models (d = c) \iff \mathfrak{B} \models (d = c) \implies c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$
($\Leftarrow$). $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$ $\forall$ безкванторной φ условия выполняются

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a})$$

Индукцией по построению формулы φ доказываем предложение ◄

25-53 *Предложение 25.5* $t(x_1, \dots, x_n) \in T(\sigma)$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, тогда

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n),$$

если $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$

25-58 ►

(1) $t = x$, тогда $t^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) = a$, $t^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) = a \implies t^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) = a = t^{\mathfrak{A}}$.
$t = c$ $(const)$, тогда $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}$

25-61 **(2)** $t = f(t_1(x_1, \dots, x_n) \dots t_k(x_1, \dots, x_n))$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A} \implies$
$t_i(a_1, \dots, a_n) = d_i$, $i = 1 \dots k$; $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) \dots t_k^{\mathfrak{A}}(\overline{a})) =$

$f^{\mathfrak{A}}(d_1, \ldots, d_k) = f^{\mathfrak{B}}(d_1, \ldots, d_k) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) \ldots t_k^{\mathfrak{B}}(\overline{a})) = t^{\mathfrak{B}}(\overline{a})$.

25-65 **(1)** $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (t(\overline{x}) = q(\overline{x}))$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow t^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) = q^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) \Longleftrightarrow t^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) = t^{\mathfrak{A}}(\overline{a})$, $q^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) = q^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) \Longrightarrow t^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) = q^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a})$

(2) $\varphi(\overline{x}) = p(t_1(\overline{x}) \ldots t_k(\overline{x}))$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ Пусть $t_i^{\mathfrak{A}}(\overline{A}) = d_i \Longrightarrow t_i^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) = d_i$, Тогда $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models p^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{a}), \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}(\overline{a})) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models p^{\mathfrak{A}}(d_1, \ldots, d_k) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models p^{\mathfrak{B}}(d_1, \ldots, d_k) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models p^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\overline{a}), \ldots, t_k^{\mathfrak{B}}(\overline{a})) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a})$ 25-68

(3) 25-74

$$\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2);\ \varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2);\ \varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2);\ \varphi = \neg\varphi_1$$

$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models (\varphi_1 \& \varphi_2)(\overline{a})$ ◄

Определение

Говорят, что формула φ в *предворенной (пренексной) форме*, если $\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. $\psi(\overline{x}, y)$ — бесквант., $Q_i \in \{\forall, \exists\}$.Тогда $\forall \varphi\ \exists \psi : \varphi \equiv \psi$, ψ — предворенная нормальная форма. 25-79

► (Следите за обновлениями!) ◄ 25-84

Теорема 25.6: критерий элементарного вложения

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, тогда $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \Longleftrightarrow \forall \varphi = \exists x\ \psi(x, \overline{y})$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ выполняется 25-90

$$\mathfrak{B} \models \exists x\ \psi(x, \overline{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists d \in \mathfrak{A} \ \mid\ \mathfrak{B} \models \varphi(d, \overline{a}).$$

► (Следите за обновлениями!) ◄ 25-95

Теорема 25.7 Ливенгейма-Скулема вниз

$\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $X \subseteq |\mathfrak{A}|$. $\alpha \geq \max(\omega, \|\gamma\|, \|X\|)$, $\alpha \leq \|\mathfrak{A}\|$ 25-99
$\exists \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A} \mid X \leq |\mathfrak{A}|$ и $\|\mathfrak{A}\| = \alpha$

► (Следите за обновлениями!) ◄ 25-101

Предложение 25.8

(1) если $\|A\| \leq \|B\|$, A, B – бесконечны, $\Longrightarrow \|A \times B\| = \|B\|$ 25-105

(2) $\|A\| - \|B\| \Longrightarrow \|A * B\| = \|B\|$ 25-106

(3) $\|A^n\| = \|A\|$

Предложение 25.9

(1) $\forall n\ \|A_n\| = \gamma \Longrightarrow \|\bigcup\limits_{n \in N}(A_n)\| = \gamma$ 25-110

(2) $\|A\| = \gamma$ - бесконечно, то $A^* \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n}(A^n)$, $\|A^*\| = \gamma$ 25-113

► (Следите за обновлениями!) ◄ 25-114

Парадокс Скулема

σ — сигнатура теории множеств, A — набор аксиом. Тогда 25-118

$$T^s \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\sigma) \mid A \vdash \varphi\}.$$

Если $T^s \not\vdash \Longleftrightarrow \exists \mathfrak{M} \models T^s$. Тогда рассмотрим

$$X \rightleftharpoons \{\oslash, \{\oslash\}, \ldots, \omega, c = 2^{\omega}, 2^{2^{\omega}}\}$$

$\|X\| = \omega$, $X \leq |\mathfrak{M}| \Longrightarrow \exists \mathfrak{N} \leq \mathfrak{M}$, $X \leq |\mathfrak{N}|$, $\|N\| = \omega = \Longrightarrow \mathfrak{N} \models T^s$

Определение 25.10 Пусть $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, , $A = |\mathfrak{A}|$ Рассмотрим множество констант 25-123

$$C_A \rightleftharpoons \{C_a \mid a \in A\}$$

Пусть

$$C_A \cap \sigma = \oslash$$

$$\sigma_A \rightleftharpoons \sigma \cup C_A$$

Рассмотрим отношение модели:

$$\mathfrak{A}_A \in K(\sigma_A)\,,\ a \in A\,,\ C_a^{\mathfrak{A}_a} \rightleftharpoons a\,,\ \mathfrak{A}_A \lceil \sigma = \mathfrak{A}$$

25-129 Элементанрная диаграмма модели $\mathfrak{A}$ Обозначается

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi\}$$

где φ - бесkванторная. Множество всех счетных на $\mathfrak{A}$ безкванторных предложений сигнатуры σ:

$$F\mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

$$F\mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{A}_A)$$

(теории) Если $C \in A$, то

$$\sigma_c \rightleftharpoons \sigma \cup \{C_a \mid a \in C\}$$

$$\mathfrak{A}_c \rightleftharpoons \mathfrak{A}_A \lceil \sigma_c$$

25-138 *Замечание 25.11* Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$, $A = |\mathfrak{A}| \in |\mathfrak{B}|$

25-140 **(1)** $\mathfrak{A} \in \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}_A \models D(\mathfrak{A})$

(2) $\mathfrak{A} \in \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}_A \models FD(\mathfrak{A})$

25-143 Доказательство на семинаре

25-147 *Замечание 25.12* **(1)** $D(\mathfrak{A}) \in FD(\mathfrak{A})$

(2) $Th\mathfrak{A} \in FD(\mathfrak{A})$

25-149 ► (Следите за обновлениями!) ◄

25-153 *Теорема 25.13 Ливенгейма-Скулема вверх* Пусть $\mathfrak{A}$ — бесконечно, $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, $\alpha \geq \max\{\|\mathfrak{A}\|,\ \|\mathfrak{B}\|\}$.
Тогда $\exists\, \mathfrak{B} \ \mid\ \|\mathfrak{B}\| = \alpha,\ \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$

25-156 ► (Следите за обновлениями!) ◄

25-160 *Следствие 25.14* Теорема Ливенгейма-Скулема вверх показывает, что следствем языка первого порядка мы не можем описывать никаких ограничений для бесконечной мощности.

25-164 *Определение 25.15* Пусть формула $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ - бесkванторная. Тогда формула

$$\exists x_1, \ldots, \exists x_n\ \psi(\overline{x}, \overline{y})$$

— $\exists$-формула;

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n\ \psi(\overline{x}, \overline{y})$$

— $\forall$-формула.

25-171 Говорят, что класс K
$\exists$-аксиоматизирован, если

$$\exists \Gamma \leq S(\sigma(K))\,,\ K = K(\Gamma)\,,\ \forall \varphi \in \Gamma\,,\ \varphi - \exists - f.$$

Говорят, что класс K
$\forall$-аксиоматизирован, если

$$\exists \Gamma \leq S(\sigma(K))\,,\ K = K(\Gamma)\,,\ \forall \varphi \in \Gamma\,,\ \varphi - \exists - f.$$

Говорят что класс K замкнут относительно подсистем, если вместе с каждой своей системой он содержит все ее подсистемы:

$$K:\quad \forall \mathfrak{A} \in K\,,\ \forall \mathfrak{B} \in \mathfrak{A}\,,\ \mathfrak{B} \in K.$$

Говорят что класс K замкнут относительно надсистем, если вместе с каждой своей системой он содержит все ее надсистемы:

$$K:\quad \forall \mathfrak{A} \in K\,,\ \forall \mathfrak{B}:\ \ \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}\ \rightarrow\ \mathfrak{B} \in K.$$

Обозначим $Th_{\exists}(K) \rightleftharpoons \{\varphi \in Th(K) \mid \varphi - \exists - f\}$. 25-180
Обозначим $Th_{\forall}(K) \rightleftharpoons \{\varphi \in Th(K) \mid \varphi - \forall - f\}$

Предложение 25.16 Пусть $K \in K_{\sigma}$. Тогда: 25-184

(1) $K \in K(Th_{\forall}(K))$ 25-186

(2) $K \in K(Th_{\exists}(K))$

► (Следите за обновлениями!) ◄ 25-188

Предложение 25.17

(1) K — $\forall$-аксиоматизируем $\Longleftrightarrow K = K(Th_{\forall}(K))$ 25-192

(2) K — $\exists$-аксиоматизируем $\Longleftrightarrow K = K(Th_{\exists}(K))$ 25-193

► (Следите за обновлениями!) ◄

Теорема 25.18 Пусть K аксиоматизируем. 25-197

(1) K — $\forall$-аксиоматизируем $\Longleftrightarrow K$ замкнут относительно надсистем; 25-199

(2) K — $\exists$-аксиоматизируем $\Longleftrightarrow K$ замкнут относительно подсистем; 25-200

► (Следите за обновлениями!) ◄ 25-201

Теорема 25.19 Интерполяционная теорема Крейга $\varphi \vdash \psi$ доказуема, $\sigma_0 = \sigma(\varphi) \cap \sigma(\psi)$, пусть $X_0 \rightleftharpoons FV(\varphi) \cap$ 25-205
$\cap\, FV(\psi)$, тогда $\exists \xi$, такой что $\varphi \vdash \xi\,,\ \xi \vdash \varphi$

► (Доказательства теоремы не требуется.) ◄ 25-208

Следствие 25.20 Пусть $\varphi \in F(\sigma)$. Тогда: 25-213

(1) $\exists\, \psi \equiv \varphi$, так что $\sigma(\psi)$ наименьшая по включению среди 25-214
$\sigma(\psi^{'})$, т.к. $\psi^{'} \equiv \varphi$; $FV(\varphi)$ - наименьш с. рас. $FV(\psi^{'})$ т.ч. $\psi^{'} \equiv \varphi$

(2) $\forall$ сигнатурного символа входящего в φ, $\forall$ свободного 25-216
первого вхождения в φ можно сказать, входит этот символ (переменная) фиктивно или по существу.

► (Следите за обновлениями!) ◄ 25-219

Теорема Эрбрана § 26

26-6 *Определение 26.1*

$$\varphi = Q_1 y_1, \dots, Q_n y_n \quad \psi(\overline{x}, \overline{y})$$

где $Q_i \in \{\forall, \exists\}, \psi$ - бескванторная

$$\varphi_H = \exists y_{i_1}, \dots, \exists y_{i_k} \quad \psi_k(\overline{x}, y_{i_1}, \dots, y_{i_k})$$

называется Эрбрановой нормальной формой, где

$$(\exists y_1 \dots \exists y_n \quad \forall y_{n+1} \xi(\overline{x}, \overline{y}, y_{k+1}, \dots))_H$$

$$\rightleftharpoons$$

$$\exists y_1 \dots y_n \quad \xi(\overline{x}, \overline{y}, f(\overline{y}), \dots))_H$$

$$\forall y \quad \xi(\overline{x}, y, \dots))_H \rightleftharpoons (\xi(\overline{x}, y, \dots))_H$$

26-17 *Теорема 26.2* $\vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \varphi_H$

26-19 ► (Следите за обновлениями!) ◄

26-23 *Теорема 26.3*
теорема Эрбрана

$\varphi \in F(\sigma)$, $\varphi = \varphi(\overline{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, $\vdash \varphi \Longleftrightarrow \exists$ наборы термов $\overline{t}_1(\overline{x}), \dots, \overline{t}_k(\overline{x})$, такие что $\vdash \psi_H(\overline{x}, \overline{t}_1(x), \cup \dots \cup \cup \psi_k(\overline{x}, \overline{t}_k(\overline{x}))$