Логика высказываний

1 Язык логики высказываний

Алфавит: $A, B, C, \ldots$ — пропозициональные переменные. Эти переменные принимают значения: истина и ложь.

Логические связки:

$\&$	-и	(конъюнкция)
$\vee$	-или	(дизъюнкция)
$\to$	-если, то	(импликация)
$\neg$	-не	(отрицание)

Определение 1.1 Формулы *исчисления высказываний:*

1. *пропозициональные переменные,*

2. *если φ и ξ — это формулы, то и $(\varphi \,\&\, \xi)$, $(\varphi \vee \xi)$, $(\varphi \to \xi)$, $\neg\varphi$ — формулы,*

3. *других формул нет.*

Определение 1.2 *Часть формулы, которая сама является формулой, называется* подформулой.

2 Таблица истинности, эквивалентность формул, нормальные формы

$\&$	$и$	$л$
$и$	$и$	$л$
$л$	$л$	$л$

$\vee$	$и$	$л$
$и$	$и$	$и$
$л$	$и$	$л$

$\to$	$и$	$л$
$и$	$и$	$л$
$л$	$л$	$и$

A	$\neg A$
$и$	$л$
$л$	$и$

Определение 2.1

- *Формула называется* тождественно истинной (теоремой, тавтологией), *если она принимает значение истина при любых значениях переменных,*

- *формула называется* тождественно ложной, *если она ложна при любых значениях переменных,*

- *формула называется* выполнимой, *если она не является тождественно ложной,*

- *формула называется* опровержимой, *если она не является тождественно истинной.*

Замечание 2.2 *Если формула тождественно истинна, то она выполнима.*

Предложение 2.3 *Следующие формулы являются тождественно истинными.*

$(A \to (B \to A))$

$((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$

$((A \mathbin{\&} B) \to A)$

$((A \mathbin{\&} B) \to B)$

$((A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \mathbin{\&} C))))$

$(A \to (A \vee B))$

$(B \to (A \vee B))$

$((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

$((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$

$\neg\neg A \to A$

$((A \to B) \vee (B \to A))$

$((A \to B) \vee (A \to \neg B))$

$(A \vee \neg A)$

$\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$

$(A \to \neg\neg A)$

$\square$

Определение 2.4 *Двуместное отношение $\sim$ называется отношением* эквивалентности, *если выполнены следующие свойства:*

1. $a \sim a$ *(*рефлексивность*),*
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ *(*симметричность*),*
3. $a \sim b$ *и* $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ *(*транзитивность*).*

Определение 2.5 *Формулы φ и ψ называются* эквивалентными *(обозначается $\varphi \sim \psi$), если их таблицы истинности совпадают.*

Замечание 2.6 $\sim$ — *отношение эквивалентности.*

Предложение 2.7 *Имеют место следующие эквивалентности:*
1) $(A \& A) \sim A$ 2) $(A \vee A) \sim A$
— *законы идемпотентности (поглотительные законы)*
3) $(A \& B) \sim (B \& A)$ 4) $(A \vee B) \sim (B \vee A)$
— *законы коммутативности*
5) $((A \& B) \&) \sim (A \& (B \& C))$
6) $((A \vee B) \vee C) \sim (A \vee (B \vee C))$
— *законы ассоциативности*
7) $(A \& (B \vee)) \sim ((A \& B) \vee (A \& C))$
8) $(A \vee (B \&)) \sim ((A \vee B) \& (A \vee C))$
— *законы дистрибутивности*
9) $\neg\neg A \sim A$ 10) $(A \to B) \sim (\neg A \vee B)$
11) $\neg(A \& B) \sim (\neg A \vee \neg B)$
12) $\neg(A \vee B) \sim (\neg A \& \neg B)$
— *законы де Моргана*
13) $(A \to \neg B) \sim (B \to \neg A) \sim \neg(A \& B)$
14) $(A \vee (A \& B)) \sim A$ 15) $(A \& (A \vee B)) \sim A$
16) $(A \vee (B \& \neg B)) \sim A$ 17) $(A \& (B \vee \neg B)) \sim A$

□

Предложение 2.8 *Для любой формулы φ существует формула $\psi \sim \varphi$, которая не содержит импликации.*

Доказательство. Следует из эквивалентности 10.

□

Обозначение: Пусть φ — подформула формулы ψ, тогда $[\psi]^{\varphi}_{\xi}$ — замена подформулы φ на подформулу ξ.

Предложение 2.9 *Пусть φ — подформула формулы ψ, $\xi \sim \varphi$, тогда $\psi \sim [\psi]^{\varphi}_{\xi}$.*

Доказательство. Проводится индукцией по построению формулы.

□

Пример 2.10 *Если $\psi = ((A \to B) \vee (A \to (C \& D)))$, $\varphi = (A \to B)$, $\xi = (\neg A \vee B)$, то $[\psi]^{\varphi}_{\xi} \sim \psi$.*

Определение 2.11 *Формула называется* формулой с тесными отрицаниями*, если она не содержит импликации, а отрицания стоят только перед переменными.*

Предложение 2.12 *Для любой формулы φ существует формула $\psi \sim \varphi$ такая, что ψ — это формула с тесными отрицаниями.*

Доказательство следует из законов де Моргана и закона 9.

□

Определение 2.13

- Элементарной конъюнкцией *называется конъюнкция пропозициональных переменных и их отрицаний,*
- элементарной дизъюнкцией *называется дизъюнкция пропозициональных переменных и их отрицаний,*
- конъюнктивной нормальной формой (КНФ*) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций,*
- *нормальная форма называется* совершенной (СКНФ, СДНФ)*, если любая переменная содержащаяся в этой формуле входит в любую ее элементарную дизъюнкцию (конъюнкцию) ровно один раз (с отрицанием или без него).*

Теорема 2.14 *Для любой формулы существуют эквивалентные ей КНФ и ДНФ.*

□

Теорема 2.15 *Для любой выполнимой формулы существует эквивалентная ей СДНФ.*

Доказательство. Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности.

1. Строим таблицу истинности.
2. Выбираем строки, где формула является истинной.
3. Для каждого такого набора значений переменных строим элементарную конъюнкцию таким образом, что если значение переменной ложь, то берем ее отрицание, если значение истинно, то ее саму.
4. Берем дизъюнкцию полученных элементарных конъюнкций.

□

Теорема 2.16 *Для любой опровержимой формулы существует эквивалентная ей СКНФ.*

Доказательство. Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности.

1. Строим таблицу истинности.
2. Выбираем строки, где формула является ложной.
3. Для каждого такого набора значений переменных строим элементарную дизъюнкцию таким образом, что если значение переменной имеет значение истины, то берем ее отрицание, а если ложь, то берем саму эту переменную.
4. Берем конъюнкцию полученных элементарных дизъюнкций.

$\square$

Следствие 2.17 *Пусть дана формула φ. Тогда*

а) Существует СДНФ $\psi \sim \varphi \iff \varphi$ — выполнима.

б) Существует СКНФ $\psi \sim \varphi \iff \varphi$ — опровержима

Доказательство.

а) $\Rightarrow$) Пусть ψ — СДНФ, $\psi \sim \varphi$, $\psi = \psi_1 \ \vee \ldots \ \vee \ \psi_k$. ψ_1 — элементарная конъюнкция, пусть в нее входят переменные $A_1, \ldots A_n$. Зададим набор значений переменных следующим образом: если A_i входит сама, то $A_i =$ "истина", если входит ее отрицание, то $A_i =$ "ложь". Тогда ψ_1 — истинна. Значит, ψ и φ — истинны. Следовательно φ — выполнима.

$\Leftarrow$) Следует из теоремы 2.15.

б) $\Rightarrow$) Пусть ψ — СКНФ, $\psi \sim \varphi$, $\psi = \psi_1 \ \& \ \ldots \ \& \ \psi_k$. ψ_1 — элементарная дизъюнкция, пусть в нее входят переменные $A_1, \ldots A_n$. Аналогично, если A_i входит сама, то $A_i =$ "ложь", если входит ее отрицание, то $A_i =$ "истина". Тогда ψ_1 — ложна. Значит, ψ и φ — ложны, то есть φ — опровержима.

$\Leftarrow$) Следует из теоремы 2.16.

$\square$

3 Полнота системы логических функций

Определение 3.1 *Функция $f : \{и,\ л\}^n \longrightarrow \{и,\ л\}$ — называется* логической функцией.

Обозначим $F = \{f \mid f$ — логическая функция$\}$.

Определение 3.2 *Пусть $\alpha \subseteq F$. α называется* полным множеством *(α — полно), если $\forall f \in F$ f может быть представлена как суперпозиция функций из α. Множество α называется* неполным*, если α не является полным.*

Предложение 3.3 $\{\&, \vee, \neg\}$ *— полно.*

$\square$

Замечание 3.4 *Пусть $\alpha, S \subseteq F$, пусть $\alpha \subseteq S$. Тогда*

а) если α — полно, то S — полно,

б) если S — неполно, то α — неполно.

$\square$

Следствие 3.5 *Множество $\{\&, \vee, \to, \neg\}$ — полно.*

$\square$

Предложение 3.6 *Множества $\{\&, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\to, \neg\}$ являются полными.*

Доказательство. Покажем, что $\{\&, \neg\}$ — полно.
$(A \ \vee \ B) \sim \neg(\neg A \ \& \ \neg B)$, $(A \ \to \ B) \sim \neg(A \ \& \ \neg B)$

$\square$

Предложение 3.7 *Множество $\{\&, \vee, \to\}$ — неполно.*

Доказательство. Предположим, что это множество полно. Рассмотрим формулу вида $\neg A$. Допустим, что существует формула φ эквивалентная ей и выражающаяся через данные логические связки. Возьмём набор переменных со значениями "истина". Тогда φ — истинна, а $\neg A$ — ложна. Противоречие.

$\square$

Следствие 3.8 *Множества $\{\&, \vee\}$, $\{\vee, \to\}$, $\{\vee, \to\}$, $\{\&\}$, $\{\vee\}$, $\{\to\}$, $\{\neg\}$ являются неполными.*

$\square$

4 Преобразование электрических схем

Будем интерпретировать логические функции как электрические цепи с двухпозиционными переключателями. В качестве переключателей будут служить пропозициональные переменные. Если значение переменной "истина", то будем считать, что ток проходит через переключатель, если — "ложно", то не проходит. Тогда естественно будет интерпретировать & как последовательное соединение двух переключателей, а $\vee$ как параллельное.

Пример 4.1 *Рассмотрим формулу* $(A \to B)\ \&\ (A \to C) \sim (\neg A \vee B)\ \&\ (\neg A \vee C)$. *Тогда электрическая схема для этой формулы будет выглядеть следующим образом:* $- \left| \begin{smallmatrix} -\overline{a}- \\ -b- \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} -\overline{a}- \\ -c- \end{smallmatrix} \right| -$

Определение 4.2

- *Две цепи называются* эквивалентными, *если через одну из них ток проходит тогда и только тогда, когда он проходит через другую.*
- *Если две цепи эквивалентны, то одна называется* проще *другой, если она содержит меньшее число контактов.*

5 Исчисление высказываний. Исчисление секвенций.(ИС)

$\vdash$(знак секвенции)

Определение 5.1 Секвенциями *ИВ будем называть слова следующих видов:* $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi,\ \vdash \Psi,\ \Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash\ ,\ \vdash$.

Определение 5.2 Аксиомами *ИВ называются секвенции вида:* $\Phi \vdash \Phi$.

Через Γ будем обозначать конечное множество формул ИВ.

Правила вывода ИС:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi\ \&\ \psi}$

2. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\ \&\ \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$

3. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\ \&\ \psi}{\Gamma \vdash \psi}$

4. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$

6. $\dfrac{\Gamma,\ \varphi \vdash \psi;\ \Gamma, \xi \vdash \psi;\ \Gamma \vdash \varphi \vee \xi}{\Gamma \vdash \psi}$

7. $\dfrac{\Gamma,\ \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \psi}$

9. $\dfrac{\Gamma,\ \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$

10. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash}$

11. $\dfrac{\Gamma,\ \varphi,\ \psi,\ \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma,\ \psi,\ \varphi,\ \Gamma_1 \vdash \xi}$

12. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma,\ \psi \vdash \varphi}$

Определение 5.3

- *Последовательность секвенций* $S_1 \dots S_n$ *называется* доказательством, *если для любого* $i \leq n$ S_i *— либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью однократного применения какого-либо правила вывода,*

- *секвенция называется* доказуемой, *если существует доказательство $S_1 \dots S_n$ такое, что $S_n = S$,*

- дерево секвенций —

  1. *если S — секвенция, то S — дерево,*
  2. *если S — секвенция, а $D_1 \dots D_n$ — деревья, то $\frac{D_1 \dots D_n}{S}$, — дерево,*
  3. *других деревьев нет,*

- высота дерева —

  1. *если $D = S$, то $h(D) = 0$,*
  2. *если $D = \dfrac{D_1, \dots, D_k}{S}$, то $h(D) = \max\limits_i(h(D_i)) + 1$.*

- деревом вывода *называется дерево в вершинах которого стоят аксиомы, а все переходы — применения правил вывода.*

Предложение 5.4 *Секвенция S является доказуемой тогда и только тогда, когда существует дерево вывода секвенции S.*

Доказательство.

$\Rightarrow$) Пусть S — доказуема, $S_1 \dots S_n$ — доказательство. Индукция по n.
Если $n = 1$, то S — аксиома, тогда S — дерево вывода.
Если $n > 1$, то пусть S получается из $S_{i_1}, \dots, S_{i_k}$ $k \leq 3$ с помощью одного из правил вывода. По индукционному предположению для S_{i_j} существуют деревья вывода D_j. Тогда $D = \dfrac{D_1, \dots, D_k}{S}$ — дерево вывода S.

$\Leftarrow$) Пусть D — дерево вывода S, $h(D) = n$. Индукция по n.
Если $n = 0$, то $D = S$ и S-аксиома, следовательно S — доказуема.
Если $n > 0$, то $D = \dfrac{D_1, \dots, D_k}{S}$, $k \leq 3$. Пусть S_i — это заключительная секвенция дерева D_i. Тогда по индукционному предположению для S_i существуют линейные доказательства $S_1^i, \dots, S_{n_i}^i = S_i$. Тогда $S_1^1, \dots, S_{n_1}^1, \dots, S_1^k, \dots, S_{n_k}^k, S$ — доказательство для S.

$\square$

Определение 5.5 *Дерево высоты 1: $\frac{S_1, \dots S_k}{S}$ называется допустимым правилом вывода, если существует дерево D, такое, что вершины D — это либо аксиомы, либо одна из секвенций $S_1, \dots S_k$ и заключительная секвенция D — S.*

Предложение 5.6 *Следующие правила выводы допустимы :*

а) $\dfrac{\psi_1, \dots \psi_n \vdash \varphi}{\xi_1, \dots \xi_k \vdash \varphi}$ б) $\dfrac{\psi_1, \dots \psi_n \vdash}{\xi_1, \dots \xi_k \vdash}$, *где* $\{\psi_1, \dots \psi_n\} \subseteq \{\xi_1, \dots \xi_k\}$

в) $\dfrac{\Gamma \vdash ; \Gamma, \psi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$ г) $\dfrac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, \varphi \ \& \ \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}$

д) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \ \& \ \neg\psi}{\Gamma \vdash}$ е) $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$

ж) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\varphi}$ з) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash}$

и) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$ к) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$

л) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$ м) $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \varphi \vdash}$

□

6 Семантика исчисления секвенций (ИС)

Определение 6.1 *Секвенция* $\varphi_1, \dots \varphi_k \vdash \varphi$ *называется* истинной при данных значениях переменных, *если либо одна из* $\varphi_1, \dots \varphi_k$ *— "л", либо* φ *— "и".*
Секвенция $\varphi_1, \dots \varphi_k \vdash$ истинна, *если хотя бы одна из* $\varphi_1, \dots \varphi_k$ *— "л".*
Секвенция $\vdash \varphi$ истинна, *если* φ *— "и".*
Секвенция называется тождественно истинной, *если она истинна при любых значениях переменных.*

Предложение 6.2 (О корректности ИС) *Если секвенция S доказуема, то она тождественно истинна.*

Доказательство. Пусть S — доказуема $\Rightarrow$ существует дерево вывода D.
Индукция по $h = h(D)$.
Если $h = 0$, то S — аксиома $\Rightarrow$ S тождественно истинна.
Пусть $h > 0$. Тогда $D = \dfrac{D_1, \dots, D_k}{S}$. Пусть S_i заключительная секвенция дерева D_i, тогда по индукционному предположению S_i — тождественно истинны.

Лемма 6.3 *Если* $\dfrac{S_1, \dots, S_k}{S}$ *— правило вывода и* $S_1, \dots, S_3$ *— тождественно истинны, то* S *— тождественно истинна.*

□

Из леммы следует, что S — тождественно истинна.

$\square$

Определение 6.4 $\rho : F \to F$ — *подстановка, если оно перестановочно с логическими связками:* $\rho(\varphi \mathbin{\&} \psi) = \rho(\varphi) \mathbin{\&} \rho(\psi)$, $\rho(\varphi \vee \psi) = \rho(\varphi) \vee \rho(\psi)$, $\rho(\varphi \to \psi) = \rho(\varphi) \to \rho(\psi)$, $\rho(\neg\varphi) = \neg\rho(\varphi)$.

Пример 6.5 $\rho : A \to A \mathbin{\&} B$, $\rho((A \to B) \vee \neg A) = (((A \mathbin{\&} B) \to B) \vee \neg(A \mathbin{\&} B))$,
S — *секвенция* $S = (\varphi_1, \dots \varphi_n \vdash \varphi)$,
ρ — *подстановка, тогда* $\rho(S) = (\rho(\varphi_1), \dots \rho(\varphi_n) \vdash \rho(\varphi))$

Теорема 6.6 (о подстановке) *Если S — доказауема, ρ — подстановка, то $\rho(S)$ — доказауема.*

Доказательство. S — доказательство $\Rightarrow$, тогда существует D — дерево вывода S. Тогда в дереве D все секвенции S заменим на $\rho(S)$. Получим дерево $D' = \rho(D)$. Тогда нетрудно понять, что D' — дерево вывода $\rho(S)$.
$\square$

Определение 6.7 *Формулы φ и ψ называются равносильными ($\varphi \equiv \psi$), если $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ — доказуемы.*

Предложение 6.8 *Равносильность является отношением эквивалентности.*

Доказательство. $\varphi \vdash \varphi$ — аксиома, доказуема $\to \varphi \equiv \varphi$. Если $\varphi \equiv \psi$, то по определению $\psi \equiv \varphi$. Транзитивность равносильности следует из следующих деревьев:

$$\frac{\varphi \vdash \psi;\ \psi \vdash \xi}{\varphi \vdash \xi} \qquad \frac{\xi \vdash \psi;\ \psi \vdash \varphi}{\xi \vdash \varphi}$$

$\square$

Предложение 6.9 *Равносильность — конгруэнция, то есть если $\varphi \equiv \varphi_1, \psi \equiv \psi_1$, то $(\varphi \mathbin{\&} \psi) \equiv (\varphi_1 \mathbin{\&} \psi_1)$, $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi_1 \vee \psi_1)$, $(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi_1 \to \psi_1)$, $\neg\varphi \equiv \neg\varphi_1$.*
$\square$

Определение 6.10 *Формула ϕ называется* доказуемой, *если доказуема секвенция $\vdash \phi$.*

Предложение 6.11 *Если φ — доказуема, $\varphi \equiv \psi$, то ψ — доказуема.*

Доказательство. Пусть φ — доказуема и $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \varphi \vdash \psi$ — доказуема. Тогда следуещее дерево будет деревом вывода секвенции $\vdash \phi$:

$$\frac{\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\vdash \varphi \to \psi}; \ \vdash \varphi}{\vdash \psi}$$

□

Теорема 6.12 (о замене) *Пусть $\varphi \equiv \varphi'$, ψ' получена из ψ заменой всех вхождений подформулы φ на φ'. Тогда $\psi \equiv \psi'$.*

Доказательство. Индукцией по (длина $\psi -$ длина φ) $= r$.
Если $r = 0$, то есть $ln\psi = ln\varphi \Rightarrow \ \psi = \varphi \Rightarrow \psi' = \varphi' \Rightarrow \psi' = \varphi' \equiv \varphi = \psi$, то есть $\psi' \equiv \psi$.
Пусть $r > 1$. Тогда ψ представима одним из следующих способов:

$$\psi = (\psi_1 \ \& \ \psi_2), \ \psi = (\psi_1 \ \vee \ \psi_2), \ \psi = (\psi_1 \to \psi_2), \ \psi = \neg\psi.$$

Тогда пусть ψ_i' получена из ψ_i заменой всех вхождений φ на φ'. Тогда по индукционному предположению $\psi_i' \equiv \psi_i$. Далее в силу конгруэнтности равносильности получаем, что $(\psi_1 \ \& \ \psi_2) \equiv (\psi_1 \ \& \ \psi_2)$, $(\psi_1 \ \vee \ \psi_2) \equiv (\psi_1 \ \vee \ \psi_2)$, $(\psi_1 \ \to \ \psi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2)$, $\psi_1 \equiv \neg\psi$. Т.е. $\psi \equiv \psi'$

□

Пример 6.13 $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$. *Тогда* $((A \to B) \ \vee \neg(A \to B)) \equiv ((\neg A \ \vee \ B) \ \vee \ \neg(\neg A \ \vee \ B))$

Предложение 6.14 *Имеют место следующие равносильности:*

1.$\neg(\varphi\&\psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

2.$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi\&\neg\psi)$

3.$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

4.$(\varphi\&\psi) \equiv (\psi\&\varphi)$

5.$(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$

6.$((\varphi\&\psi)\&\xi) \equiv (\varphi\&(\psi\&\xi))$

7.$((\varphi \vee \psi) \vee \xi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \xi))$

8.$(\varphi\&(\psi \vee \xi)) \equiv ((\varphi\&\psi) \vee (\varphi\&\xi))$

9.$(\varphi \vee (\psi\&\xi)) \equiv ((\varphi \vee \psi)\&(\varphi \vee \xi))$

10.$(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$

11.$(\varphi \vee (\psi\&\neg\psi) \ \vee \xi)) \equiv (\varphi \vee \xi)$

12.$(\varphi\&(\psi \vee \neg\psi)\&\xi)) \equiv (\varphi\&\xi)$

13.$(\varphi\&(\psi \vee \neg\psi)\&\xi)) \equiv (\varphi\&\xi)$

□

7 Теорема о полноте ИС

Теорема 7.1 *Для любой формулы φ существует КНФ $\psi \equiv \varphi$.*

Доказательство.

1. Строим $\psi_1 \equiv \varphi$, которая не содержит символов $\rightarrow$.
2. Строим $\psi_2 \equiv \psi_1$ такую, что ψ_2 — с тесными отрицаниями.
3. С помощью законов дистрибутивности строим $\psi \equiv \psi_2$ такую, что ψ — КНФ.

□

Предложение 7.2 *Доказуема* $(\varphi \lor \neg\varphi)$.

Следствие 7.3 *КНФ является доказуемой $\iff$ $\forall$ ее элементарных дизъюнкций $\exists$ переменная, входящая в эту дизъюнкцию вместе с отрицанием.*

Доказательство.

(⇒) Пусть φ — доказуема $\Rightarrow \vdash \varphi$ — доказуема $\Rightarrow \vdash \varphi$ — тождественно истинна. $\varphi = \varphi_1 \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi_n$.

Пусть $\exists$ элементарная дизъюнкция $\varphi_i : \varphi_i = (A \lor \neg B \lor C \ldots) \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \vdash \varphi$ — тождественно истинна.

(⇐)

$$\frac{\vdash A \lor \neg A}{\vdash B \lor A \lor \neg A \lor C \ldots} \Rightarrow \varphi = \varphi_1 \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi_n$$

$$\frac{\dfrac{\vdash \varphi_1, \ldots \vdash \varphi_n}{\ldots}}{\vdash \varphi_1 \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi_n} \Rightarrow \vdash \varphi$$

□

Теорема 7.4 (о полноте ИС) *Если φ — тождественно истинна, то φ — доказуема.*

Доказательство. Пусть $\varphi \equiv \psi$, ψ — КНФ, φ — тождественно истинна $\Rightarrow$ $\varphi \vdash \psi$ —доказуема $\Rightarrow \varphi \vdash \psi$ — тождественно истинна $\Rightarrow \psi$ — тождественно истинна $\Rightarrow \psi = \psi_1 \ \& \ \ldots \ \& \ \psi_n$ $\forall i$ ψ_i содержит P и $\neg P \Rightarrow \psi$ — доказуема $\Rightarrow \varphi$ — доказуема. □

Теорема 7.5 *а) φ — тождественно истинна $\iff$ φ — доказуема.*

б) S — тождественно истинна $\iff$ S — доказуема.

Доказательство.

а) Следствие теоремы 7.4 и теоремы 6.2.

б) ($\Rightarrow$) S — тождественно истинна, $S = \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$. $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \varphi) \dots)$ — тождественно истинна $\Rightarrow$ доказуема.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi_1 \vdash \varphi_1 \vdash (\varphi_1 \to \dots \varphi)}{\varphi_1 \vdash (\varphi_2 \to (\dots)\ \varphi_2 \vdash \varphi_2}}{\varphi_1,\ \varphi_2 \vdash \varphi_3}}{\dots}}{\varphi_1\ \varphi_n \vdash \varphi}$$

$\Rightarrow S$ — доказуема.
($\Leftarrow$) Теорема 6.2 $\square$

Следствие 7.6 $\forall \varphi, \psi\ \varphi \sim \psi \iff \varphi \equiv \psi$.

Доказательство. $\varphi \sim \psi \iff \varphi \vdash \psi,\ \psi \vdash \varphi$ — тождественно истинны $\iff \varphi \vdash \psi,\ \psi \vdash \varphi$ — доказуемы $\iff \varphi \equiv \psi$. $\square$

Обозначение $\Gamma \vdash \varphi$: существует конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash \varphi$ доказуема.

Следствие 7.7 *(Теорема об адекватности) $\Gamma_0 \vdash \varphi \iff$ для любого значения переменных, если Γ истинно, то φ — истинна.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow$ существует конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что секвенция $\Gamma_0 \vdash \varphi$ доказуема. $\Gamma_0 \vdash \varphi$ тождественна истинна. Пусть для некоторого значения переменных Γ истинно, тогда Γ_0 истинно. Следовательно, φ — истинна.

($\Leftarrow$) Пусть для любого значения переменных из истинности Γ следует истинность φ. Пусть в φ входит $A_1, \dots A_n$; $\alpha \subseteq \{0,1\}^n$, $\alpha_0 \subseteq \{\varepsilon \in \alpha \mid$ на ε φ ложно $\}$ Следовательно, если $\varepsilon \in \alpha_0 \Rightarrow$ на ε Γ не истинно $\Rightarrow \exists \psi_\varepsilon \in \Gamma\ :\ \psi_\varepsilon$ ложно на ε. Тогда рассмотрим $\Gamma_0 \subseteq \{\psi_\varepsilon \mid \varepsilon \in \alpha_0\}$ $\Rightarrow \forall \varepsilon \in \alpha$ если на ε истинно Γ_0, то $\varepsilon \notin \alpha_0 \Rightarrow$ на ε истинна $\varphi \Rightarrow$ секвенция Γ_0 тождественно истинна $\Rightarrow \Gamma_0 \vdash \varphi$ доказуема $\Gamma \vdash \varphi$.

8 Исчисление высказываний Гильбертовского типа

Определение 8.1 *Аксиомы:*

1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$,
2. $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \xi)) \to (\varphi \to \xi)))$,
3. $((\varphi \mathbin{\&} \psi) \to \varphi)$,
4. $((\varphi \mathbin{\&} \psi) \to \psi)$,
5. $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \xi) \to (\varphi \to (\psi \mathbin{\&} \xi))))$,
6. $(\varphi \to (\varphi \lor \psi))$,
7. $(\varphi \to (\psi \lor \varphi))$,
8. $((\varphi \to \xi) \to ((\psi \to \xi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \xi)))$,
9. $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)))$,
10. $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$

и одно правило вывода:
$\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$.

Определение 8.2

- *последовательность формул* $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ *называется* доказательством в исчислении высказываний *(ИВ), если любое* φ_i *либо является аксиомой, либо получено из предыдущих применений одного правила вывода. Если* $\varphi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$ *— доказательство, то говорят, что формула* φ *доказуема и обозначают* $\rhd\varphi$,

- *последовательность формул* $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ *называется* доказательством из множества гипотез H, *если любое* φ_i *либо является аксиомой, либо* $\varphi_i \in H$, *либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода. Если* $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ *доказательство из* H, *то говорят, что* φ *выводимо из* H *и обозначают* $H \rhd \varphi$.

- *последовательность формул $\varphi_1 \dots \varphi_n$ называется* квазивыводом из множества гипотез H, *если любое φ_i либо является аксиомой, либо $\varphi_i \in H$, либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода, либо выводима в ИВ из H.*

Пример 8.3 *Пусть Φ — формула ИВ, тогда следующая последовательность формул будет доказательством формулы $\Phi \to \Phi$ в ИВ:*

1. $\Phi \to (\Phi \to \Phi)$ *— аксиома*
2. $\Phi \to ((\Phi \to \Phi) \to \Phi)$ *— аксиома*
3. $(\Phi \to (\Phi \to \Phi)) \to ((\Phi \to ((\Phi \to \Phi) \to \Phi)) \to (\Phi \to \Phi))$ *— аксиома*
4. $(\Phi \to ((\Phi \to \Phi) \to \Phi)) \to (\Phi \to \Phi)$ *— правило вывода к 1. и 3.*
5. $\Phi \to \Phi$ *— правило вывода к 2. и 4.*

Теорема 8.4 (О дедукции) *Если $H \cup \{\varphi\} \rhd \psi$, то $H \rhd (\varphi \to \psi)$.*

Доказательство. Индукция по минимальному n, для которого существует вывод $\Psi_0, \dots, \Psi_n$ формулы Ψ из $H \cup \{\Phi\}$.
Если $n = 0$, то либо $\Psi = \Phi$, либо Ψ — аксиома или входит в $H \cup \{\Phi\}$. В первом случае в силу предыдущего примера формула $\Phi \to \Psi$ выодима из H. Во втором случае последовательность

$$\Psi, \Psi \to (\Phi \to \Psi), \Phi \to \Psi$$

будет выводом в ИВ из H.
Пусть $n > 0$.

Теорема 8.5 (Об эквивалентности ИС и ИВ)

а) Секвенция $\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi$ доказуема $\iff$ $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\} \rhd \psi$.

б) Секвенция $\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$ доказуема $\iff$ $\exists \psi \ : \ \{\varphi_1 \dots \varphi_n\} \rhd (\psi \ \& \ \neg\psi$.

Теория множеств

1 Множества и операции над ними

$x \in A$ (x является элементом множества A),

$A \subseteq B$ (A лежит в B, A является подмножеством множества B),

$A = B \iff \forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Следствие 1.1 $A = B \iff$ *($A \subseteq B$ и $B \subseteq A$).*

Операции над множествами:

$A \cup B \lesseqgtr \{x \mid x \in A,$ либо $x \in B\}$,

$A \cap B \lesseqgtr \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$,

$\overline{A} \lesseqgtr \{x \mid x \notin A\}$,

$A \setminus B \lesseqgtr \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$,

$A \dot{-} B \lesseqgtr (A \setminus B) \ \vee\ (B \setminus A)$.

Замечание 1.2 *а)* $A = B \iff A \dot{-} B = \emptyset$,

б) $A \subseteq B \iff A \setminus B = \emptyset$,

в) $A \cup B = \emptyset \iff A = \emptyset \ \vee\ B = \emptyset$.

Замечание 1.3 $A \subseteq B$

а) $A \cup B = B$,

б) $A \cap B = A$,

в) $A \setminus B = \emptyset$.

г) $\overline{A} \cup B = U$.

$A \to A(x) \lesseqgtr (x \in A)$

Замечание 1.4 $(A \cup B)(x) = A(x) \ \vee\ B(x)$,

$(A \cap B)(x) = A(x)\ \&\ B(x)$,

$\overline{A}(x) = \neg A(x)$,

$(A \setminus B)(x) = A(x) \ \& \ \neg B(x)$,

$(A \dot{-} B)(x) = ((A(x) \ \& \ \neg B(x)) \ \vee \ (B(x) \ \& \ \neg A(x))$.

Следствие 1.5 1) $A \cup A = A \cap A = A$ *идемпотентность*
2) $A \cup B = B \cup A$ 3) $A \cap B = B \cap A$
коммутативность
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
ассоциативность
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
дистрибутивность
8) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$
9) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 10) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
законы де Моргана
11) $\overline{\overline{A}} = A$ 12) $A \cap \overline{A} = \emptyset$
13) $A \cup \overline{A} = U$ 14) $A \dot{-} B = B \dot{-} A\emptyset$

2 Отношения и функции

Определение 2.1 $(\ ) = \emptyset$, $(a) = a$, $(a_1 \ldots a_n)$
$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1 \ldots a_n) \mid a_i \in A_i\}$,
$\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}} = A^n$
B *называется* n-местным отношением (n-арным предикатом), *если* $B \subseteq A^n$.
Если $B \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$, *то* $B_i \leqslant \{a \mid \exists (a_1 \ldots a_{i-1}, \ a, \ a_{i+1} \ldots a_n) \in B\}$

$B \subseteq A_1 \times A_2$, $C \subseteq A_2 \times A_3$, $B \circ C \subseteq A_1 \times A_n$.
$B \circ C \leqslant \{(x, z) \mid \exists y \ . \ (x, y) \in B, \ (y, z) \in C\}$,
$B^{-1} \leqslant \{(y, x) \mid (x, y) \in B\}$,
$id_A \leqslant \{(a, a) \mid (a, a) \in A\}$,
$B \subseteq A^2 \Rightarrow B \circ B^{-1} \subseteq id_A$, $(B^{-1})^{-1} = B$.
F — *функция*, если $\forall x \exists ! \ y \ (x, y) \in F$, то есть

1. $\forall x \exists y \ (x, y) \in F$,

2. $\forall x, y_1, y_2 \ ((x, y_1), (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2)$.

$(x_1, \dots x_n, y),\ ((x_1, \dots x_n)y)$
Функция F называется *обратимой*, если обратное соответсвие является функцией.

Определение 2.2 $R \subseteq A^2$.

R — отношение предпорядка, *если*

1. $\forall x \in A\ (x,x) \in R$, *по-другому* $id_A \subseteq R$, xRx — *рефлексивность (например,* $x \leq x,\ x \sim x$*),*
2. $\forall x, y, z\ (x,y),(y,z) \in R \to (x,z) \in R$ *или* $R \circ R \subseteq R$, $xRy, yRz \to xRz$ *(например,* $x \leq y, y \leq z \to x \leq z$*),*

R —отношение эквивалентности, *если*

1. R — *предпорядок,*
2. $(x,y) \in R \to (y,x) \in R$, $R^{-1} = R$ — *симметричность (например,* $x \sim y \to y \sim x$*),*

R — частичный порядок, *если*

1. R — *предпорядок,*
2. $(x,y),(y,x) \in\ R \to x = y$, $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$ — *антисимметричность (например,* $x \leq y, y \leq x \to x = y$*),*

R — линейный порядок, *если*

1. R — *частичный порядок,*
2. $\forall x, y \in A\ (x,y) \in R$, *либо*$(y,x) \in\ R$, $R \cup R^{-1} = id_A$ *(например,* $x \leq y,\ y \leq x$*).*

$A_i \subseteq A, i \in I$ — *разбиение*, если $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ и $A_j \cap A_i = \emptyset$ при $i \neq j$.
$R \lesseqgtr \{(x,y) \mid \exists i\ .\ x, y \in A_i\}$
R — отношение эквивалентности $\to R$ — разбиение.
$x\ [x]_R \lesseqgtr \{\psi \mid (x,y) \in R\}$
$x \sim y$ — *класс эквивлентности*, или смежный, или фактор-класс.
$I \subseteq A\ A_x \lesseqgtr [x]_R\ x \in I$ — *факторизация.*

3 Max, min, наибольшие, наименьшие элементы, точная верхняя и нижняя грани

Определение 3.1 $(A, \leq, 0)$ — *частично-упорядоченное множество.*

$a \in A$ — *наибольший, если* $\forall b \in A \,.\, b \le a$,

$a \in A$ — *наименьший, если* $\forall b \in A \,.\, b \ge a$,

$a \in A$ — *ет* max, *если* $\forall b \in A \,.\, a \le b \to a = b$,

$a \in A$ — *ет* min, *если* $\forall b \in A \,.\, b \le a \to a = b$

Примеры.

$a < b \quad (a \le b$ *и* $b \ne a)$,

a
b $\quad a \ge b \quad$ a — *наибольший и* max
b — *наименьший и* min

$a \quad b \quad a, b$ — max *и* min

$a \quad b$
c
a — max
b — max
c — *наименьший и* min

Замечание 3.2 *Наибольший всегда* max, *наименьший всегда* min.

Доказательство. a — наибольший, не max $\Rightarrow \exists b \in A \,.\, a \le b$. $b \ge a \Rightarrow b = a$.

Замечание 3.3

а) $\le$ — *транзитивное*,

б) *Пусть* $(A, \le)$ — *ч.у.м.* A — *конечно* $\Rightarrow \forall a \in A \exists b, c \in A \,.\, b \le a \le c$, b — min, c — max.

Доказательство. Пусть $\|A\| = n$, пусть $a \in A$ и a не min $\Rightarrow \exists a_1 \le a$, если a_1 не min, то $\exists a_2 \le a_1 \ a > a_1 > a_2 > \dots$

$a_i \ne a_j$. Пусть $a_i = a_j \ i \ne j \Rightarrow a_i \ge a_{i+1} \ge \dots a_j = a_i \Rightarrow a_i = a_j$ — противоречие. $\Rightarrow a_i$ различны и через n шагов элементы кончаются и получается min.

Замечание 3.4 *Пусть* $(A, \le)$ — *ч.у.м.* A — *конечно, если а единственный* max $\to \leftarrow$, *а единственный* min $\to \leftarrow$.

Доказательство. Пусть a — единственный max, $b \in A \Rightarrow \exists c \ge b$, c — max $\Rightarrow c = a \Rightarrow a \ge b$ Пусть a — наибольший и b — max $\Rightarrow a \ge b \Rightarrow a = b \Rightarrow$ a — единственный max.

Пример. $A = R \cup \{i\}$, i — единственный max, — единственный min, но наибольшего и наименьшего элементов нет.

a и b не сравнимы, если $a \not\le b$ и $b \not\le a$.

Предложение 3.5 *Пусть L — л.у.м. Если a — $\max$, то a — наибольший. Если a — $\min$, то a — наименьший.*

Доказательство. Пусть $a \in L$ и a — max. Пусть $b \in L$, если $a \leq b$, то $a = b \Rightarrow b \leq a \Rightarrow b < a$.

Следствие 3.6 *В конечном линейно-упорядоченном множестве всегда есть наибольший и наименьший элементы.*

Определение 3.7 *L — л.у.м., $M \subseteq L$, $a \in L$,*

a — верхняя грань M, $a \geq M$, если $\forall b \in M \ a \geq b$,

a — нижняя грань M, $a \leq M$, если $\forall b \in M \ a \leq b$,

a — точная верхняя грань M, $a = supM$, если a — наименьшая верхняя грань, т.е.

1. *$\forall b \in M \ a \leq b \ (a \geq M)$,*
2. *$\forall c \geq M \ a \leq c$,*

a — точная нижняя грань M, $a = infM$, если a — наибльшая нижняя грань, т.е.

1. *$a \leq M$,*
2. *$\forall c \leq M \ a \geq c$.*

Предложение 3.8 *а) Если $a \geq M$, $a = supM$ ($a < M$, $a = infM$) и $\in M$, то a — наибольший (наименьший) элемент M.*

б) Если a — наибольший (наименьший) элемент M, то $a = supM$ ($a = infM$).

в) Если $a \in M$, то $a \geq M \iff a = supM$, $a = infM$.

Пример 3.9

а) $a \geq b$, $c \geq d$, M_1, M_2 не имеют sup и inf $sup_L\{a,b\} = a$, $inf_L\{a,b\} = b$.

б) нет $supM_1$, $infM_2$, но $\exists inf_L M_1 \ sup_L M_2$.

в) $L = R \ M \subseteq L \ \exists sup_L M \iff M$ — ограничено сверху, $\exists inf_L M \iff M$ — ограничено снизу.

г) $L = Q\ M = \{x \mid \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$ *нет* $sup_L M$, *нет* $inf_L M$ $sup_{IR} M = \sqrt{3}$, $inf_{IR} M = \sqrt{2}$ $sup_{L\cup M} M = 2$, $inf_{L\cup M} M = 1$

д) $sup_R[0,1] = sup_R(0,1) = 1$ $inf_R[0,1] = inf_R(0,1) = 0$

Определение 3.10 L — *л.у.м.* — решеточно-упорядоченное множество, *если* $\forall a, b \in L \exists sup_L\{a,b\}$ *и* $inf_L\{a,b\}$, *тогда* $a \cup b \leqslant sup_L\{a,b\}$, $a \cap b \leqslant inf_L\{a,b\}$.

Если $sup_L M \notin M$, то $\neg \exists sup_L M$.

Пример 3.11 $(L, \leq)$, $(L, \cup, \cap)$ — *решетка.*

Предложение 3.12 *Любое линейно-упорядоченное множество — решеточно-упорядоченно.*

Доказательство. Пусть L — л.у.м., $a, b \in L \Rightarrow a \leq b$, либо $b \leq a$. Пусть $a \leq b \Rightarrow a = \inf_L\{a,b\}$, $b = inf_L\{a,b\} \Rightarrow L$ — р.у.м.

$\mathcal{P}(A) \leqslant \{P \mid B \subseteq A\} \leqslant 2^A = \{0,1\}^A$ — множество всех подмножеств множества A или множество-степень.

$B^A \leqslant \{f \mid f : A \to B\}$

$C \subseteq A\ x_C \leqslant \begin{matrix} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{matrix}$

$x_C : A \to \{0,1\}$

4 Булевы алгебры

Определение 4.1 $\mathfrak{A} \leqslant \{A, \cup, \cap, \bar{}, 0, 1\}$ — булева алгебра*, если*

1)	$a \cup b = b \cup a$	9)	$a \cup a = a$
2)	$a \cap b = b \cap a$	10)	$a \cap a = a$
3)	$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$	11)	$a \cup \overline{a} = 1$
4)	$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$	12)	$a \cap \overline{a} = 0$
5)	$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$	13)	$\overline{\overline{a}} = a$
6)	$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$	14)	$a \cup 0 = a$
7)	$\overline{a \cup b} = \overline{a} \cap \overline{b}$	15)	$a \cap 0 = 0$
8)	$\overline{a \cap b} = \overline{a} \cup \overline{b}$	16)	$a \cup 1 = 1$
		17)	$a \cap 1 = 1$

Предложение 4.2

$\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A \rangle$ — *булева алгебра.*

$F(A_1, \ldots A_n) \leqslant \{\psi \mid \psi$ — формула, в ψвходит только$A\}$

Пример 4.3 $\langle F(A_1, \dots A_n) \mid n \vee, \&, \neg, \cup, \cap \rangle$ — *булева алгебра.*

Определение 4.4 $a \le b$, *если* $a \cap b = a$.

Предложение 4.5 *Если* $\mathfrak{A}$ — *булева алгебра, то* $\langle A, \le \rangle$ — *ч.у.м.*

Доказательство.

1. $a \le a$, так как $a \cap a = a$.

2. $a \le b,\ b \le a \Rightarrow a = a \cap b = b \cap a = b \Rightarrow b = a$.

3. $a \le b,\ b \le c \Rightarrow a = a \cap b,\ b = b \cap c \Rightarrow a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a \Rightarrow a \le c$.

Предложение 4.6 $a \le b \iff a \cup b = b$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $a \le b \Rightarrow a = a \cap b \Rightarrow \bar{a} = \overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b} \Rightarrow b = b \cup 0 = b \cup (a \cap \bar{a}) = (b \cup a) \cap (b \cup \bar{a}) = (a \cup b) \cap (\bar{a} \cup \bar{b} \cup b) = (a \cup b) \cap (\bar{a} \cup 1) = (a \cup b) \cap 1 = a \cup b$

($\Leftarrow$) Пусть $a \cup b = b$. $\bar{b} = \overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$. $a = a \cap 1 = a \cap (b \cup \bar{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap \bar{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap \bar{a} \cap b) = (a \cap b) \cup 0 = a \cap b \Rightarrow a = a \cap b \Rightarrow a \le b$.

Предложение 4.7 *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *булева алгебра. Тогда* $\langle A, \le, \ \rangle$ — *ч.у.м.*

Доказательство.

1. Докажем: $a \cup b = sup_A\{a, b\}$

   а) $a \cup (a \cup b) = (a \cup a) \cup b = a \cup b \Rightarrow a \le a \cup b$. Аналогично, $b \le (a \cup b) \Rightarrow a \cup b \le \{a, b\}$

   б) Пусть $c \le \{a, b\} \Rightarrow c > a,\ c > b \Rightarrow a = c \cap a,\ b = c \cap b \Rightarrow a \cup b = (c \cap a) \cup (c \cap b) = c \cap (a \cup b) \Rightarrow c \ge a \cup b \Rightarrow a \cup b = sup_A\{a, b\}$

2. Докажем: $a \cap b = inf_A\{a, b\}$

   а) $a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b \Rightarrow a \ge a \cup b$. Аналогично, $a \cap b \le \{a, b\}$

   б) Пусть $c \le a,\ c \le b \Rightarrow a = c \cup a,\ b = c \cup b \Rightarrow a \cap b = (c \cup a) \cap (c \cup b) = c \cup (a \cap b) \Rightarrow c \le a \cap b \Rightarrow a \cap b = inf_A\{a, b\}$

Определение 4.8 *$\mathfrak{A}$ — булева алгебра, a — мин в $A \setminus \{0\} \Rightarrow a$ — атом булевой алгебры $\mathfrak{A}$.*

Предложение 4.9 *Пусть $a, b \in \mathfrak{A}$, a — атом $\Rightarrow a \cap b = 0$ либо $a \cup b = a$.*

Доказательство. Пусть $a \cap b \neq 0 \Rightarrow 0 \neq a \cap b \leq a \Rightarrow a \cap b = a$.

Следствие 4.10 *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная булева алгебра, $c \in \mathfrak{A}$, $c = neq0$ $\Rightarrow \exists a$ — атом $a \leq c$.*

Определение 4.11

Если $\forall c \neq 0$ $c \in \mathfrak{A}$, $\exists a$ — атом, $a < c \Rightarrow \mathfrak{A}$ — атомная булева алгебра.

Если $\forall a \in A$ a — не атом, $\Rightarrow \mathfrak{A}$ — безатомная булева алгебра.

Если $a \neq 0$, то

a — *атом* $\iff \neg b < a : b \neq 0$

— *безатомный* $\iff \neg b < a \ : \ b$ — *атом*

— *атомный* $\iff \neg b < a \ : \ b \neq 0$ *и* b — *безатомный*

Пример 4.12 *а)* $0 = 1$ — *вырожденная булева алгебра,* $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$

б) $P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

в) $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Замечание 4.13 *$\forall$ множества x $\mathcal{P}(x)$ — атомная булева алгебра.*

Доказательство. $Y \in \mathcal{P}(X)$, $Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in Y$ $\{a\}$ — атом $\mathcal{P}(X)$, $\{a\} \leq Y$.

$\mathfrak{A}$ — булева алгебра, $At(\mathfrak{A}) = \{a \in \mathfrak{A} \mid a$ — атом$\}$.

Следствие 4.14 *$Y \in At(\mathcal{P}(X)) \iff Y$ — одноэлементно.*

Пример 4.15 *Рассмотрим множество $U(\mathbb{Q}) \leq \{Y \subseteq \mathbb{Q} \mid Y$ открыто-замкнуто$\}$.
$\langle U(\mathbb{Q}), \cup, \cap, ^-, \emptyset, \mathbb{Q}\rangle$ —булева алгебра,
$(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \leq \{x \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}\}$.
$Y \subseteq U(\mathbb{Q})$, $Y \neq \emptyset$, $\exists a \in Y \Rightarrow \exists b, c$ $b < a < c$, $(b, c) \subseteq Y$ $\exists$ иррацинальное и иррациональное $d, e : b < d < a < c < e$.*

$Z \leqslant (d,e) \Rightarrow Z \in U(\mathbb{Q}),\ Z \neq \emptyset,\ YZ \neq \emptyset = Y$ не атомное $\Rightarrow U(\mathbb{Q})$ безатомное.

Предложение 4.16 *$\mathfrak{A}$ — булева алгебра, $a, b \in \mathfrak{A}$. $a \cap b = 0 \iff a \leq \bar{b}$*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ $a \cap b = 0 \Rightarrow a = a \cap (b \cup \bar{b}) = (a \cap b) \cup (a \cap \bar{b}) = (a \cap \bar{b}) \Rightarrow a \leq \bar{b}$.

$(\Leftarrow)$ $a \leq \bar{b} \Rightarrow a = a \cap \bar{b} \Rightarrow a \cap b = (a \cap \bar{b}) \cap b = a \cap (b \cap \bar{b}) = a \cap 0 = 0$.

Обозначение: $At(a) \leqslant \{c \leq a \mid c$ — атом$\}$.
$a \in \mathfrak{A}$ $At(\mathfrak{A}) = At(\mathbf{1}^a)$.

Предложение 4.17 *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная булева алгебра. $a \in \mathfrak{A}$, $C = At(a)$. Тогда $a = \bigcup_{d \in C} d$.*

Доказательство. Пусть $C = At(a)$, $b = \bigcup_{d \in C} d$. Показать $a = b$. Заметим $\forall d \in C\ d \leq a$. $b = sup\{d \mid d \in C\} \Rightarrow b \leq a$. От противного. Пусть $a \nleq b$, $b = \bar{\bar{b}} \Rightarrow a \cap \bar{b} \neq 0 \Rightarrow \exists$ атом $d \leq a, \bar{b} \Rightarrow d \leq a \Rightarrow d \in C \Rightarrow d \leq b \Rightarrow d \leq b \cap \bar{b} = 0 \Rightarrow d = 0$. Доказали противоречие. $\Rightarrow a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$, то есть $a = \bigcup_{d \in C} d$.

Замечание 4.18 *Пусть $a, b \in \mathfrak{A}$, a — атом, тогда $a < b \iff a \nleq \bar{b}$.*

Доказательство. $a = a \cap (b \cup \bar{b}) = (a \cap) \cup (a \cap \bar{b})$ — не равны одновременно. Если $a \cap b = 0,\ a \cap \bar{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \cup 0 = 0$. Противоречие. Если $a \cap b = a,\ a \cap b = a \Rightarrow a = a \cap b \cap a \cap \bar{b} = 0$. Противоречие. $a \cap b = a \iff a \leq b$ $a \cap \bar{b} = a \iff a \leq \bar{b}$.

Теорема 4.19 (Теорема Стоуна для конечных булевых алгебр) *Если a — конечная булева алгебра, то $\mathfrak{A} \cong \mathcal{P}(At(\mathfrak{A}))$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $h :\mid \mathfrak{A} \to \mathcal{P}(At(\mathfrak{A}))$. $X \leqslant At(\mathfrak{A})$ $a \in \mathfrak{A}$ $h(a) \leqslant At(a) \subseteq X$. Доказать, что h — изоморфизм.

1. h — взаимоодназначно. Пусть $a \neq b$. Если $a \nleq b$ либо $b \nleq a$. Пусть $a \leq b$. Следовательно, $a \cap \bar{b} \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ атом $c \leq a \cap \bar{b} \Rightarrow c \leq a,\ c \leq \bar{b}$ $\Rightarrow c \cap b = 0$, то есть $c \nleq b \Rightarrow c \in h(a)$ и $c \notin h(b) \Rightarrow h(a) \neq h(b)$ $\Rightarrow h$ — разнозначно. Пусть $C \subseteq X \Rightarrow a \leqslant \bigcup_{d \in C} d$. Покажем, что $h(a) = At(a) = C$. $C \subseteq At(a)$. Пусть $d \leq a$, d — атом $\Rightarrow d \leq \bigcup_{c \in C} c$ $\Rightarrow d = d \cap \bigcup_{c \in C} c = \bigcup_{c \in C} (d \cap c)$ $d \neq 0 \Rightarrow \exists c \in C$ $c \cap d \neq 0 \Rightarrow$ $c = c \cap d = d \Rightarrow d \in C \Rightarrow At(a) \leq C \Rightarrow At(a) = C \Rightarrow C = h(a)$.

2. h — гомоморфизм, то есть что h сохраняет операции. Пусть $a, d \in \mathfrak{A}$ $h(a \cap b) = \{c \in X \mid c \leq a \cap b\} = \{c \in X \mid c \leq a\} \cap \{c \in x \mid c \leq b\} = h(a) \cap h(b)$. Так как $a \leq a \cap b \iff c \leq a$ и $c \leq b$. Покажем, что $h(\bar{a}) = \overline{h(a)}$. $h(\bar{a}) = \{c \in X \mid c \leq \bar{a}\} = \{c \in X \mid c \nleq a\} = X \setminus \{c \in X \mid c \leq a\} = X \setminus h(a) = \overline{h(a)}$.
   $h(a \cup b) = h(\overline{\overline{a \cup b}}) = \overline{h(\bar{a} \cap \bar{b})} = \overline{h(\bar{a}) \cap h(\bar{b})} = \overline{\overline{h(a)} \cap \overline{h(b)}} = \overline{\overline{h(a)}} \cup \overline{\overline{h(b)}} = h(a) \cup h(b)$.
   $h(a) = h(a \cap \bar{a}) = h(a) \cap \overline{h(a)} = \emptyset$.
   $h(1) = h(a \cup \bar{a}) = h(a) \cup \overline{h(a)} X \Rightarrow h$ — гомоморфизм $\Rightarrow h$ — изоморфна.

Определение 4.20 *Пусть $I \subseteq \mid \mathfrak{A} \mid \neq \emptyset$.*

I называется идеалом или $I \lhd \mathfrak{A}$, если

а) $\forall a, b \in I$ $a \cup b \in I$,

б) $a \leq b,\ b \in I \Rightarrow a \in I$

I — максимальный идеал, $I \neq \mid \mathfrak{A} \mid$, $\forall J \lhd \mathfrak{A}$ если $I \subseteq J$, то $I = J$ либо $J = \mid \mathfrak{A} \mid$.

Пример 4.21 *а) $\mid \mathfrak{A} \mid \lhd \mathfrak{A}$,*

б) $\{0\} \lhd \mathfrak{A}$,

в) $a \in \mathfrak{A}$ $\hat{a} \lesseqgtr \{b \in \mathfrak{A} \mid b \leq a\} \lhd \mathfrak{A}$.

Предложение 4.22 *$\mathfrak{A}$ — булева алгебра, $I \lhd \mathfrak{A}$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

а) I — $\lhd_{\max}\mathfrak{A}$,

б) $\forall a \in \mathfrak{A}$ либо $a \in I$, либо $\bar{a} \in I$,

в) Если $a, b \in \mathfrak{A},\ a \notin I,\ b \notin I$, то $a \cap b \notin I$ и $I \neq \mid \mathfrak{A} \mid$.

Доказательство.

(а $\Rightarrow$ б) Пусть $I \lhd_{\max} \mathfrak{A},\ a \in \mathfrak{A}$. Если $a, \bar{a} \in I \Rightarrow 1 = a \cup \bar{a} \in I \Rightarrow \forall b \in \mathfrak{A}$ $b \leq 1 \Rightarrow b \in I$, то есть $I = \mid \mathfrak{A} \mid$. Противоречие.
Пусть $a, \bar{a} \notin I,\ J \lesseqgtr \{x \cup y \mid x \leq a,\ y \in I\}$ $J \lhd \mathfrak{A} : x_1, x_2 \leq a,\ y_1, y_2 \in I \Rightarrow (x_1 \cup y_1) \cup (x_2 \cup y_2) = (x_1 \cup x_2) \cup (y_1 \cup y_2)$. Если $b \leq x \cup y \Rightarrow b = b \cap (x \cup y) = (b \cap x) \cup (b \cap y) \Rightarrow b \in J$. J — собственный идеал, если $1 \in J \Rightarrow 1 = x \cup y,\ x \leq a,\ y \in I \Rightarrow 1 = a \cup y \Rightarrow 0 = \bar{a} \cap \bar{y} \Rightarrow \bar{a} \leq \bar{\bar{y}} \Rightarrow \bar{a} \in I$ — противоречие. $\Rightarrow 1 \notin J$, то есть $J \neq \mid \mathfrak{A} \mid$. $a \notin I \Rightarrow J \neq I$ $\forall y \in I$ $y = 0 \cup y \in J \Rightarrow I \subseteq J$ — противоречие.

(б⇒ в) От противного. Пусть $a \cup b \notin I \Rightarrow \bar{a}, \bar{b} \in I \Rightarrow \bar{a} \cup \bar{b} \in I \Rightarrow \overline{a \cap b} \in I$ $\Rightarrow a \cap b \notin I$. $0 \in I$ либо $1 \in I$, то $I \cap 0 \leq 0 \in I$ — противоречие $\Rightarrow$ $1 \notin I \Rightarrow neq \mid \mathfrak{A} \mid$.

(б⇒ а) Пусть $I \lhd \mathfrak{A}$. Из (б) следует $I \neq \mid \mathfrak{A} \mid$, то есть I — собственный. Пусть $J \lhd \mathfrak{A}$, $I \subseteq J$, $I \neq J \Rightarrow \exists a\ a \in J$, $a \notin I \Rightarrow \bar{a} \in I \Rightarrow \bar{a} \in J \Rightarrow$ $1 = a \cup \bar{a} \in J \Rightarrow J = \mid \mathfrak{A} \mid$. Следовательно, I — максимальный.

Лемма 4.23 (Лемма Цорна) *Пусть L — ч.у.м., $\forall C \subseteq L$, если $C \neq \emptyset$ и C — л.у.м. (C — цепь), то $\exists a \in L\ a \leq C$, тогда в L существует максимальный элемент. (Если в ч.у.м. каждая цепь имеет верхнюю грань, то в этом множестве существует максимальный элемент.)*

Предложение 4.24 *Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, $J \lhd \mathfrak{A}$. Тогда $\exists J \neq \mid \mathfrak{A} \mid$ $I \lhd_{\max} \mathfrak{A}\ J \subseteq I$.*

Доказательство. Рассмотрим $X \subseteq \{I \lhd \mathfrak{A} \mid 1 \notin I, J \subseteq I\}$ $J \in X \Rightarrow$ $X \neq \emptyset$. Пусть $C \subseteq X$, $C \neq \emptyset$. Пусть C - цепь по отношению включения, то есть $\langle X, \subseteq \rangle$ — ч.у.м. Это означает, что $\forall I, K \in C$ выполнено $I \subseteq K$ либо $K \subseteq I$. Положим $M \leqslant \bigcup_{I \in C} I$, тогда $M \lhd \mathfrak{A}$.

а) $a, b \in M \Rightarrow \exists I, J \in C\ a \in I,\ b \in J$. Пусть $J \subseteq I \Rightarrow a, b \in I \Rightarrow$ $a \cup b \in I \Rightarrow a \cup b \in M$.

б) $a \in M,\ b \leq a \Rightarrow \exists I \in C\ :\ a \in I \Rightarrow b \in I \Rightarrow b \in M$. Если $1 \in M \Rightarrow$ $\exists I \in C \Rightarrow I \subseteq M,\ J \subseteq I \Rightarrow J \subseteq M \Rightarrow M \in X, \forall I \in C\ I \leq M \Rightarrow$ (по лемме Цорна) $\exists I$ — max в $X \Rightarrow J \subseteq I,\ 1 \notin I$.

Покажем, что $I \lhd_{\max} \mathfrak{A}$. Пусть $I \subseteq K,\ I \neq K$. Пусть $1 \notin K \Rightarrow J \subseteq K \Rightarrow$ $K \in X$ — противоречие $\Rightarrow I \lhd_{\max} \mathfrak{A}$.

Следствие 4.25 *Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, $a \in \mathfrak{A}$, $a \neq 1$, тогда $\exists I \lhd_{\max}$ $\mathfrak{A}$ такой6 что $a \in I$.*

Доказательство. Пусть $J \leqslant \hat{a} \lhd \mathfrak{A} \Rightarrow \exists I \lhd_{\max} \mathfrak{A}$ такой, что $\hat{a} \subseteq I \Rightarrow$ $a \in I$ (так как $a \neq 1 \Rightarrow 1 \notin \hat{a}$).

Теорема 4.26 (Стоуна) *Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, тогда $\exists$ множество X и изоморфное вложение $h : \mathfrak{A} \to \mathcal{P}(X)$.*

Доказательство. ($\mathcal{P}(X)$ — атомная булева алгебра) Рассмотрим $X \leqslant$ $\{I \mid I \lhd_{\max} \mathfrak{A}\}$ и $h : \mathfrak{A} \to \mathcal{P}(X)$. Если $a \in \mathfrak{A}$, то $h(a) \leqslant \{I \in X \mid a \notin I\}$.

а) Разнозначность. Пусть $a \neq b \Rightarrow a \dot{-} b = (a \dot{-} b) \cup (b \dot{-} a) \neq 0$. Если $a \cap \bar{b} = 0 \Rightarrow a \leq b$, если $b \cap \bar{a} = 0 \Rightarrow b \leq a$. Пусть $a \not\leq b \Rightarrow a \cap \bar{b} \neq 0$ $\Rightarrow \overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b} \neq 1 \Rightarrow \exists I \lhd_{\max} \mathfrak{A} \ : \ \bar{a} \cup b \in I \Rightarrow \bar{a} \in I, \ b \in I \Rightarrow a \notin I$ $\Rightarrow I \in h(a), \ I \notin h(b) \Rightarrow h(a) \neq h(b)$.

б) Сохранение операций (гомоморфизм).
1) Пусть $h(a \cup b) = h(a) \cup h(b)$ $I \in h(a \cup b) \iff a \cup b \notin I \iff a, b \notin I \iff I \in h(a)$ либо $I \in h(b) \iff I \in h(a) \cup h(b)$
2) $h(a \cap b) = h(a) \cap h(b)$ $I \in h(a \cap b) \iff a \cap b \notin I \iff a \notin I$ и $b \notin I \iff I \in h(a)$ и $I \in h(b) \iff I \in h(a) \cap h(b)$
3) $h(\bar{a}) > \overline{h(a)}$ $I \in h(\bar{a}) \Rightarrow \bar{a} \notin I \iff ainI \iff I \notin h(a) \iff I \in \overline{h(a)}$.
h сохраняет операции $\Rightarrow h$ — изоморфное вложение.

5 Мощность множества

Определение 5.1 $\|A\| = \{B \mid \exists f : A \to B$ *— взаимооднозначное*$\}$
$\|A\| = \|B\|$ $\exists f : A \to B$ *— взаимооднозначное.*

Замечание 5.2 *1.* $\|A\| = \|A\|$,

2. $\|A\| = \|B\| \to \|B\| = \|A\|$,

3. $\|A\| = \|B\|, \ \|B\| = \|C\| \to \|A\| > \|C\|$.

Доказательство.

1. $id_A : A \to A$ — взаимооднозначно.
2. $f : A \to B$ — взаимооднозначно $\to f^{-1} : B \to A$ — взаимооднозначно.
3. $f : A \to B$ — взаимооднозначно, $g : B \to C$ — взаимооднозначно, $f \circ g : A \to C$ — взаимооднозначно.

Равносильность — отношение эквивалентности.

Определение 5.3 $\|A\| < \|B\|$ $\exists B_0 \subseteq B \ : \ \|A\| = \|B_0\|$. *Мощность множества A меньше мощности множества B, если множество A находится во взаимнооднозначном соответствии с некоторым подмножеством множества B.*

Замечание 5.4 $\|A\| \leq \|B\| \iff \exists$ *разнозначное* $f : A \to B$ $B_0 = f(A)$.

Предложение 5.5 *Отношение* $\|\cdot\| \le \|\cdot\|$ *— предпорядок, а именно*

1. $\|A\| \le \|A\|$,

2. $\|A\| \le \|B\|,\ \|B\| \le \|C\| \to \|A\| \le \|C\|$.

Доказательство.

1. $id_A : A \to A$.

2. $f : A \to B,\ g : B \to C,\ f \circ g : A \to C$ — разнозначно.

Теорема 5.6 (Кантора-Бернштейна) $\|A\| \le \|B\|$ *и* $\|B\| \le \|A\| \to \|A\| = \|B\|$, *то есть* $\|\cdot\| \le \|\cdot\|$ *— отношение частичного порядка.*

Доказательство.

Рис.

$\|A\| \le \|B\|,\ \|B\| \le \|A\|$. У нас есть $f : A \to B,\ g : B \to A$ — равнозначно. Обозначим $A_0 \leqslant A,\ A_1 \leqslant g(B),\ A_{n+2} \leqslant g(f(A_n))$ $\|B\| = \|A\|$.

Рис.

$\|A\| = \|A_1\|$. $f \circ g : A \to A$ — разнозначно. $M_i \leqslant A_i \setminus A_{i+1}$, тогда $f \circ g : M_i \to M_{i+1}$. Обозначим $M \leqslant \bigcap A_i$. Построим отображение $h : A \to A_1$
$$h(a) \leqslant \begin{cases} a, & a \in M \cup (\bigcup_i M_{2i+1}), \\ g(f(a)), & a \in \bigcup_i M_{2i}. \end{cases}$$
$h : A \to A_1$ — взаимооднозначно $\Rightarrow \|A\| = \|A_1\| = \|B\| \Rightarrow \|A\| = \|B\|$ □

$\|A\| < \|B\|\ :\ \|A\| \le \|B\|,\ \|A\| \ne \|B\|$

Теорема 5.7 (Кантора) $\|A\| < \|\mathcal{P}(A)\|$.

Доказательство. Мощность

1. $\|A\| \le \|\mathcal{P}(A)\|$ $f : A \to \mathcal{P}(A) : f(a) \leqslant \{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

2. $\|A\| \ne \|\mathcal{P}(A)\|$. Предположим $\|A\| = \|\mathcal{P}(A)\| \Rightarrow \exists f : A \to \mathcal{P}(A)$ — взаимооднозначное. $a \in A$ a — хороший, если $a \notin f(A)$. $H \leqslant \{a \mid a$ — хороший $\} = \{a \mid a \notin f(a)\}$. Поскольку f — на , $H \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow \exists b \in A\ :\ f(b) = H$. Вопрос $b \in f(b)$?

а) $b \in f(b) \Rightarrow b \in H \Rightarrow b \notin f(b)$ — противоречие.

б) $b \notin f(b) \Rightarrow b$ — хороший $\Rightarrow b \in H \Rightarrow b \in f(b)$ — противоречие.
$\Rightarrow \|A\| \neq \|\mathcal{P}(A)\| \Rightarrow \|A\| < \|\mathcal{P}(A)\|$.

Парадокс Кантора : Рассмотрим $A \leqslant \{a \mid a$ — множество$\}$, если $b \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow B$ — множество $\Rightarrow B \in A \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq A$. Следовательно, $id_{\mathcal{P}(A)} : \mathcal{P}(A) \to A$ — разнозначно $\Rightarrow \|\mathcal{P}(A)\| \leq \|A\|$, но $\|A\| < \|\mathcal{P}(A)\|$.

Парадокс Рассела : $A = \{a \mid a \notin a\}$, тогда $A \in A$?

а) $A \in A \to A \notin A$,

б) $A \notin A \to A \in A$.

6 Счетные множества

Из парадокса Кантора $\Rightarrow \|\mathbb{N}\| < \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \ldots$.

Определение 6.1 *Множество A называется счетным, если $\|A\| = \|\mathbb{N}\|$,*

A называется бесконечным, если $\exists B \subseteq A\ B \neq A$ и $\|B\| = \|A\|$,

если A не бесконечно, то A — конечно. (не бесконечно, для любого своего подмножества не равносильно).

Пример 6.2 *а)* $2\mathbb{N} \leqslant \{2m \mid m \in \mathbb{N}\}$ *— счетно*

б) $\mathbb{Z}$ *— счетно* $f(2n) = n,\ f(2n+1) = -n\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

в) $\mathbb{Q}$ *— счетно*

Предложение 6.3 *а) Если A — счетно, то A^2 — счетно.*

б) Если $A,\ B$ — счетны, то $A \times B$ — счетно.

Доказательство.

Рис.

б) Докажем, что $\mathbb{N}^2$ — счетно.

$\Rightarrow \exists g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ — взаимооднозначно,
A — счетно : $\exists f_1 : A \to \mathbb{N}$ — взаимооднозначно.
B — счетно : $\exists f_2 : B \to \mathbb{N}$ — взаимооднозначно.
$A \times B \xrightarrow{f_1 \times f_2} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{g}$
$h(a, b) = g(f(a), f(b))$, h — взаимоодозначно.

а) Следует из б) если $B \lesseqgtr A$ $\square$

Следствие 6.4 $n \leq 1$ — *натуральное*

а) $\mathbb{N}^n$ — *счетно*

б) A — *счетно, то* A^n — *счетно*

в) $A_1, \dots A_n$ — *счетны, то* $A_1 \times \dots \times A_n$ — *счетно*

Доказательство.
в) По индукции.
$n = 1$ A_1 — счетно по условию.
$n \to n+1$ $A_1 \times \dots \times A_n$ — счетно. $A_1 \times \dots \times A_{n+1} = (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}$ — счетно. $\square$

Предложение 6.5 $\mathbb{N}^\omega \lesseqgtr \bigcup_k \mathbb{N}^k$ — *счетно.*

Доказательство.

Рис.

$\square$

Следствие 6.6 *Если* A — *счетно, то* $A^k \lesseqgtr \bigcup_k A^k$ — *счетно.*

Доказательство. $f : A \to \mathbb{N}$ — взаомооднозначно, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^\omega$, $g : A^\omega \to \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{N}$, $g = f^\omega \times h$ $g(a_1, \dots, a_k) = h(f(a_1), \dots, f(a_k))$ $\square$

Следствие 6.7 *Пусть* A — *счетно. Тогда* $\mathcal{P}^f(A) \lesseqgtr \{B \subseteq A \mid B$ — *конечно*$\}$ — *счетно.*

Доказательство.

1. Покажем, что $\|\mathcal{P}(A)\| \geq \|\mathbb{N}\|$. Построим $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}^f(A)$ — разнозначное. $g(n) \lesseqgtr \{f(n)\} \Rightarrow \|\mathbb{N}\| \leq \left\|\mathcal{P}^f(A)\right\|$

2. Покажем, что $\left\|\mathcal{P}^f(A)\right\| \leq \|\mathbb{N}\|$. Рассмотрим : $h : \mathcal{P}^f(A) \to A^\omega$. $B \subseteq A$, B — конечно $\Rightarrow \{a_1 < \dots < a_k\} = B$. $h(B) = (a_1, \dots, a_k) \in A^\omega$, h — разнозначно $\Rightarrow \left\|\mathcal{P}^f(A)\right\| \leq \|A^\omega\| = \|\mathbb{N}\| \Rightarrow \left\|\mathcal{P}^f(A)\right\| = \|\mathbb{N}\|$. $\square$

Предложение 6.8 *Пусть* I — *счетно,* $\forall i$ A_i — *счетно и* $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. *Тогда* A — *счетно.*

Доказательство. $i_0 \in I \Rightarrow A_{i_0} \subseteq A \Rightarrow \|A\| \geq \|\mathbb{N}\|$.

I — счетно $\Rightarrow \exists g : \mathbb{N} \to I$. A_i — счетно $\Rightarrow \exists f_i : \mathbb{N} \to A_i$. Рассмотрим множество B_n: $B_0 \lesseqgtr A_{g(0)}$, $B_{n+1} \lesseqgtr A_{g(n+1)} \setminus (\bigcup_{i \leq n} A_{g(i)})$. Очевидно, что $A = \bigcup_k B_k$ и $\|B_k\| \leq \|\mathbb{N}\| \Rightarrow \exists g_k : B_k \to \mathbb{N}$ — разнозначное. $h : A \to \mathbb{N}$, $S : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ — взаимооднозначное. $b \in A \Rightarrow \exists k\ b \in B_k$. $h(b) = S(k,\ g_k(b))$ — разнозначное $\Rightarrow \|A\| \leq \|\mathbb{N}\| \Rightarrow \|A\| = \|\mathbb{N}\|$. $\square$

Следствие 6.9 *Если I — счетно, $A_i \neq \emptyset$, $\|A_i\| \leq \|\mathbb{N}\|$, то $\bigcup_i A_i$ — счетно.*

Предложение 6.10 *Пусть A — бесконечно, тогда $existsB \subseteq A$ такое, что B — счетно.*

Доказательство. A — бесконечно $\Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_1 \in A\ A \neq \{a_1\} \Rightarrow \exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}\ A \neq \{a_1,\ a_2\} \Rightarrow \exists a_3 \in A \setminus \{a_1,\ a_2\}$ и т.д.

$B = \{a_1,\ a_2, \dots\}$, $f : \mathbb{N} \to B\ f(i) = a_i$. $\square$

Следствие 6.11 *A — бесконечно, $a \in A$, тогда $\|A\| = \|A \setminus \{a\}\|$.*

Доказательство. A — бесконечно, $\exists$ счетное $B \subseteq A$, $a \in B$

$a \notin B \Rightarrow \|B\| = \|B \cup \{a\}\|$. Пусть $a \in B \Rightarrow \|B\| = \|B \setminus \{a\}\|, \|A\| = \|A \setminus B\| \cup \|B\| = \|A \setminus B\| \cup \|B \setminus \{a\}\| = \|A \setminus \{a\}\|$ $\square$

Следствие 6.12 *Если A — бесконечно, B — конечно, то $\|A\| = \|A \setminus B\| = \|A \cup B\|$*

7 Континуум (C)

Определение 7.1 *A — континуально (имеет мощность континуума), если $\|A\| = \|\mathbb{R}\|$*

Теорема 7.2 (О несчетности континуума) $\|\mathbb{R}\| > \|\mathbb{N}\|$

Доказательство. $\|\mathbb{N}\| \leq \|\mathbb{R}\|$ так как $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Покажем, что $\|\mathbb{R}\| \neq \|\mathbb{N}\|$. Предположим, что $\|\mathbb{R}\| = \|\mathbb{N}\|$, тогда $[0, 1)$ — счетно.

$f(0) = 0,\ \alpha_0^0\ \alpha_1^0\ \alpha_2^0 \dots$

$\dots$

$f(k) = 0,\ \alpha_0^k\ \alpha_1^k\ \alpha_2^k \dots$

$\dots$

Рассмотрим $\beta_i \lesseqgtr \begin{matrix} 0, & \alpha_i^i \neq 0 \\ 1, & \alpha_i^i = 0 \end{matrix}.$

$b = 0, \beta_1\beta_2 \dots \in [0, 1) \Rightarrow \exists n\ f(n) = b$.

$0, \alpha_0^n \dots = 0,\ \beta_0 \Rightarrow \alpha_n^n = \beta_n$ — противоречие $\Rightarrow \|\mathbb{R}\| > \|\mathbb{N}\|$. $\square$

Предложение 7.3 $[a,b],\ (a,b),\ [a,b),\ (a,b]$ — *равномощны.*

Доказательство. Следует из следствия 6.12.

Предложение 7.4 *Пусть* $\|A\| = \|B\|,\ \|C\| = \|D\|$. *Тогда* $\|A \times C\| = \|B \times D\|$

Доказательство. $f : A \to B$ — взаимооднозначно, $g : C \to D$ — взаимооднозначно. $h(a,c) = (f(a),\ g(c))$, $h : A \times C \to B \times D$ — взаимооднозначно. □

Следствие 7.5 $\|A_i\| = \|B_i\|$. *Тогда* $\|A_1 \times \ldots \times A_n\| = \|B_1 \times \ldots \times B_n\|$.

Лемма 7.6 *Если* A *— бесконечно,* $\|B\| \leq \|A\|$. *Тогда* $\|A \cup B\| = \|A\|$.

Предложение 7.7 *Если* $\|A\| = \|B\|$, $\|C\| = \|D\|$, $A \cup B$ *— бесконечно, то* $\|A \cup C\| = \|B \cup D\|$.

Доказательство. на семинаре.

Предложение 7.8 *Интервал и прямая равномощны.*

Рис.

Предложение 7.9 *Две окружности равномощны.*

Рис.

Предложение 7.10 *Окружность и прямая равномощны.*

Рис.

Следствие 7.11 *Если* $\|A\| = \|C\| = C$, *тогда* $\|A \cup B\| = C$.

Рис.

Теорема 7.12 *Прямая и плоскость равномощны.* $\|\mathbb{R}\| = \|\mathbb{R}^2\|$.

Доказательство. $(0,1) \sim (0,1)^2$, $\|(0,1)^2\| \leq \|(0,1)\|$. $f : (0,1)^2 \to (0,1)$ $(a,b) \to c$. $a = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, $b = 0,\beta_1\beta_2\ldots$, $c = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots$

$f(a,b) = c\ (0,9090\ldots)$, f —разнозначное $\Rightarrow \|(0,1)^2\| \leq \|(0,1)\|$.

Рис.

□

Следствие 7.13 $\|\mathbb{R}^n\| = \mathcal{C}$.

Континуум гипотеза. $\neg\exists A\ :\ \omega < \|A\| < \mathcal{C}$.

Обобщенная континуум гипотеза. $\forall B\ \neg\exists A\ \ :\ \ \|B\| < \|A\| < \|\mathcal{P}(B)\|$.

Теорема 7.14 $\|\mathbb{R}\| = \|\mathcal{P}(\mathbb{N})\| = \left\|2^{\mathbb{N}}\right\|$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ $\|\mathcal{P}(\mathbb{N})\| \leq \|\mathbb{R}\|$.

$A \subseteq \mathbb{N} \to a_n \lesseqgtr \begin{matrix} 0, & n \notin A, \\ 1, & n \in A. \end{matrix}$

$A \to 0, a_1 a_2 \ldots \in (0,1)$. $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ — разнозначно. $\Rightarrow \|\mathcal{P}(\mathbb{N})\| \leq \|\mathbb{R}\|$.

$(\Leftarrow)$ $\|\mathbb{R}\| \leq \|\mathcal{P}(\mathbb{N})\|$. Достаточно доказать, что $\|(0,1)\| \leq \|\mathcal{P}(\mathbb{N})\|$. $a \in (0,1) \to$ в двоичной записи $a = 0,01001\ldots$. $g(a) \lesseqgtr A = \{n \mid a_n = 1\}$. $g : (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ — разнозначно.$\Rightarrow \|(0,1)\| \leq \|\mathcal{P}(\mathbb{N})\| \Rightarrow \|\mathbb{R}\| \leq \|\mathcal{P}(\mathbb{N})\| \Rightarrow \|\mathbb{R}\| = \|\mathcal{P}(\mathbb{N})\|$. □

Предложение 7.15 *Пусть* $\|I\| = \mathcal{C}, \forall i \in I\ \|A_i\| = \mathcal{C}$. *Тогда* $\left\|\bigcup_{i\in I} A_i\right\| = \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть $i_0 \in I$, $A_{i_0} \subseteq A \Rightarrow \|A\| \geq \mathcal{C}$, $h : A \to I$, $a \in A_{h(a)}$, $\exists f : I \to (0,1)\ \forall i \in I\ \exists g_i : A_i \to (0,1)$. $g(a) \lesseqgtr (g_{h(a)}(a),\ f(h(a)))$. $a \overset{h(a)}{\to} i = h(a)\ a \in A_i$, $a \to (g_i(a),\ f(a))$ Таким образом $g : A \to (0,1)^2 = (0,1) \times (0,1) \Rightarrow \|A\| \leq \mathcal{C} \Rightarrow \|A\| = \mathcal{C}$. □

Предложение 7.16 $\left\|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right\| = \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть $a \in (0,1)^{\mathbb{N}}$

$$a\ :\quad \begin{aligned} a_1 &= 0, \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_1^3 \\ a_2 &= 0, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \\ a_3 &= 0, \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 \end{aligned}$$

$a \to 0, \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_1^2 \alpha_3^1 \alpha_2^2 \alpha_1^3 = f(a)$, $f : (0,1)^{\mathbb{N}} \to (0,1)$ — разнозначно. $\Rightarrow \left\|(0,1)^{\mathbb{N}}\right\| \leq \mathcal{C}$.

$a \in (0,1) \to \{a_n\}\ :\ a_i = a$ — разнозначно $\Rightarrow \|(0,1)\| \leq \left\|(0,1)^{\mathbb{N}}\right\| \Rightarrow \left\|(0,1)^{\mathbb{N}}\right\| = \mathcal{C} \Rightarrow \left\|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right\| = \mathcal{C}$. □

8 Вполне упорядоченное множество

Определение 8.1 *Линейно-упорядоченное множество L называется вполне-упорядоченным, если любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.*

Предложение 8.2 *(принцип трансфинитной индукции {запредельной}) Пусть L — вполне-упорядоченное множество, $B \subseteq L$ и $\forall a \in L$ $((\forall b < a)(b \in B) \to a \in B) \Rightarrow B = L$.*

Доказательство. Рассмотрим $C = L \setminus B$. Пусть $C \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in C$ a — наименьшее $\Rightarrow \forall b < a,\ b \in B \Rightarrow a \in B$ — противоречие $\Rightarrow B = L$. $\square$ L — в.у.м., $a \in L$, то $\exists b$ — наименьший в $L \setminus \hat{a} = L \setminus \{c \in L \mid c \leq a\}$.

Определение 8.3 *L — в.у.м., $A \subseteq L$. A — начальный сегмент L, если $\forall a \in A \forall b \in L$ $b \leq a$ выполняется $b \in A$, то есть $\forall a \in A \hat{a} \subseteq A$.*

Аксиома выбора $\forall i \in I$ $A_i \neq \emptyset$. Тогда $\exists f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$. $\forall i f(i) \in A_i$.

$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I$ $f(i) \in A_i\}$.

Remix аксиомы Если $\forall i$ $A_i \neq \emptyset,$ $I \neq \emptyset$, то $\prod_{i \in I} A_i \in \emptyset$.

Предложение 8.4 *Аксиома выбора эквивалентна следующему утверждению : Если $X \neq \emptyset$, то $\exists f : \mathcal{P}(X) \to X : \forall Y \subseteq X$ $f(Y) \in Y$.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Очевидно, по определению аксиомы выбора ($\{A_i\}_{i \in I} \lesseqgtr \mathcal{P}(X)$).

($\Leftarrow$) $X \lesseqgtr \bigcup_{i \in I} A_i$. Рассмотрим $g : \mathcal{P}(X) \to X$: $\forall Y \subset X$ $g(Y) \in Y$. $f(i) \lesseqgtr g(A_i)$ $\forall i$ $A_i \subset X$ $A_i \in \mathcal{P}(X)$. $f(i) = g(A_i) \in A_i$. $\square$

Теорема 8.5 (Лемма Цорна или принцуп максимума)
Пусть L — ч.у.м. и $\forall A \subseteq L$ если A — цепь, то есть л.у.м., то $\exists a \in L$ $a \geq A$. Тогда $\exists$ максимальный элемент L.

Доказательство.(от противного) Пусть L не имеет $\max L \Rightarrow \forall a \in L \exists b > a$. $A \subseteq L$, A — цепь. $\exists a \geq L \exists b > a \Rightarrow b \in V_A \lesseqgtr \{c \mid c \geq A,\ c \notin A\} \neq \emptyset$.

$V_A \subseteq L$. $\exists f : \mathcal{P}(L) \to L$ такое, что $\forall X \subseteq L$ $f(X) \in X$. Положим для цепи $A \subseteq L$, $h(A) \lesseqgtr f(V_A),\ h(A) \notin A$.

Рассмотрим множество $U \lesseqgtr \{A \subseteq L \mid A$ — цепь, $\forall B \subseteq A (B \neq A)$ если B — начальный сегмент A $h(B) \in A,\ h(B) = inf_A(A \setminus B)\}$. $\{h(\emptyset)\} \in U$ $\Rightarrow U \neq \emptyset$. $\{h(\emptyset),\ h(\{h(\emptyset)\}), \ldots\} \in U$.

Покажем, что если $A, B \in U$, то A — начальный сегмент B, либо B — начальный сегмент A. Рассмотрим $C \lesseqgtr \{a \in A \mid \forall b \in a\ (b \in A \leftrightarrow b \in B)\}$. C — начальный сегмент A и B. Пусть $C \neq A$ и $C \neq B$. Тогда $h(C) \in A,\ h(C) \in B$ и $h(C) = inf_A(A \setminus C),\ h(C) = inf_B(B \setminus C) \Rightarrow h(C) \in C$ — противоречие с выбором h.

$D \lesseqgtr \bigcup_{A \in U} A$ $a, b \in D \Rightarrow \exists A, B \in U$: $a \in A, b \in B$. Пусть $A \subseteq B \Rightarrow a, b \in A \Rightarrow a \leq b$ либо $b \leq a$, то есть D — цепь.

Пусть $A \in U, A \in D$ и нужно показать, что A — начальный сегмент. Пусть $b \in D, b \leq a \Rightarrow \exists B \in U$ такое, что $b \in B$.

а) если $B \subseteq A \Rightarrow b \in A$.

б) если $A \subseteq B \Rightarrow A$ — начальный сегмент $B \Rightarrow b \in A \Rightarrow A$ — начальный сегмент D.

Покажем, что $D \in U$. Пусть $B \subseteq D$, $B \neq D$, B — начальный сегмент D. $h(B) = inf_D(D \setminus B)$. $B \neq D \Rightarrow D \setminus B \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in D \setminus B, a \geq B$ $\Rightarrow \exists A \in U \ : \ a \in A \Rightarrow B \subseteq A$, B — начальный сегмент A, $a \in A \setminus B$ $\Rightarrow B \neq A \Rightarrow h(B) \in A, h(B) = inf_A(A \setminus B) \Rightarrow h(B) = inf_D(D \setminus B)$, так как A — начальный сегмент $D \Rightarrow D \in U$, но рассмотрим множество $D_1 = D \cup h(D)$. Легко проверить, что $D_1 \in U \Rightarrow D_1 \subseteq D \Rightarrow h(D) \in D$ — противоречие. □

Теорема 8.6 (ЛЦ → ТЦ) *[Теорема Цермелло или принцип полного упорядочивания] Любое множество можно полностью упорядочить.*

Доказательство. Рассмотрим $U \leqslant \{\langle B, \leq\rangle \mid B \subseteq L, \langle B, \leq\rangle$ — в.у.м.$\}$. Заметим, что $\langle\emptyset, \emptyset\rangle \in U$. $\langle A, \leq\rangle \preceq \langle B, \leq\rangle \ : \ A \subseteq B$ с тем же порядком и $\langle A, \leq\rangle$ — начальный сегмент $\langle B, \leq\rangle$. Тогда $\langle U, \preceq\rangle$ — ч.у.м. Покажем, что U — имеет максимальный элемент. $L \subseteq U$, L — цепь. Нужно показать, что L — имеет верхнюю грань. Рассмотрим $D \leqslant \bigcup_{\langle A, \leq\rangle \in L} A$.

Покажем, что D — верхняя грань, то есть $L \preceq D$ и $D \in H$. Пусть $a, b \in D \Rightarrow \exists A, B \in L \ a \in A, b \in B$. Пусть $A \subseteq B \Rightarrow a, b \in B \Rightarrow a \leq b$ либо $b \leq a \Rightarrow \langle D, \leq\rangle$ — л.у.м.

Пусть $\langle A, \leq\rangle \in L \Rightarrow A \subseteq D$. Пусть $a \in A, b \in D, b \leq a \Rightarrow \exists B \in L \ :$ $b \in B$. Если $B \subseteq A$, то $b \in A$. Если $A \preceq B$, то A — начальный сегмент B $\Rightarrow b \in A \Rightarrow A \preceq D \Rightarrow L \preceq D$.

Покажем, что $D \in U$, так как D — в.у.м. Пусть $C \subseteq D$, $C \neq \emptyset \Rightarrow$ $\exists a \in C \Rightarrow \exists A \in L \ : \ a \in A$.

Обозначим $E \leqslant A \cap C, E \subseteq A$, A — в.у.м. $\Rightarrow \exists d = \min E$.

Покажем, что $d = \min C$. Пусть $b \in C, b \notin E \Rightarrow b \notin A$, $\exists b \in L \ : \ b \in B$ $\Rightarrow B \not\subseteq A \Rightarrow A \preceq B$, то есть A — начальный сегмент $B \Rightarrow A \leq b$. (Пусть $d \not\leq b \Rightarrow b \leq D \Rightarrow b \in A$ — противоречие) $\Rightarrow d \leq b \Rightarrow d = \min C \Rightarrow D$ — в.у.м., то есть $\langle D, \leq\rangle \in U \Rightarrow D$ — верхняя грань L (в U) $\Rightarrow \exists\langle A, \leq\rangle$ — max в U.

Покажем, что $A = L$. Пусть $A \neq L \Rightarrow \exists a \in L \setminus A$. Рассмотрим $B \leqslant A \cup \{a\}$ и положим, что $\forall b \in A \ b \leq a \Rightarrow \langle B, \leq\rangle$ — в.у.м, $A \subset B$ — противоречие с тем, что $\langle A, \leq\rangle$ — max в $U \Rightarrow A = L$, то есть $\langle A, \leq\rangle = \langle L, \leq\rangle$ — вполне-упорядоченное L. □

Теорема 8.7 (Теорема Цермелло → АВ)

Доказательство. $X\ \exists f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X\ :\ \forall Y \subseteq X\ f(Y) \in Y$. Пусть $X \neq \emptyset \Rightarrow \exists \leq$ на $X\ :\ \langle X, \leq\rangle$ — в.у.м. $\forall Y \subseteq X\ f(Y) \leqslant \min Y \in Y$. $\square$

Предложение 8.8 *Пусть A, B — в.у.м., $f : A \to B$, $g : A \to B$ — изоморфные вложения и пусть $f(A)$ и $g(A)$ — начальные сегменты B. Тогда $f = g$.*

Доказательство. $C \leqslant \{a \in A \mid \forall b \leq a\ f(b) = g(b)\} \Rightarrow C$ — начальный сегмент A.

Пусть $C \neq A \Rightarrow A \setminus C \neq \emptyset$, пусть $d = \min A \setminus C$.

$C \leqslant \min B \setminus f(C) \Rightarrow f(d) = e = g(d) \Rightarrow \forall b \leq d\ b = d\ \vee\ b \in C \Rightarrow f(b) = g(b) \Rightarrow d \in C$ — противоречие $\Rightarrow A = C$, то есть $f = g$. $\square$

Следствие 8.9 *Пусть A — в.у.м., B — начальный сегмент A, $B \neq A$. Тогда $B \ncong A$.*

Доказательство. (от противного) Пусть $A \cong B,\ f : B \overset{\cong}{\to} A$, $idB : B \to A \Rightarrow f = idB \Rightarrow B = f(B) = A \Rightarrow A = B$ — противоречие. $\square$

Предложение 8.10 *Пусть A — в.у.м, B и C — начальные сегменты A. Тогда B — начальный сегмент C, либо C — начальный сегмент B.*

Доказательство. $D \leqslant B \cap C$, D — начальный сегмент A, то есть если $a \leq b,\ b \in D,\ a \in A \Rightarrow b \in B \Rightarrow a \in B$, аналогично $a \in C \Rightarrow a \in D$.

Пусть $D \neq B,\ D \neq C,\ b = \min B \setminus D,\ c = \min C \setminus D,\ d \leqslant \min A \setminus D$. Покажем, что $b = d$. $b, d \notin D \Rightarrow b, d \in A \setminus D \Rightarrow d \leq b, b \in B \Rightarrow d \in B \Rightarrow d \in B \setminus D \Rightarrow b \leq d \Rightarrow b = d$, аналогично $d = c \Rightarrow b = c \Rightarrow b \in B \cap C = D$ — противоречие $\Rightarrow B$ — начальный сегмент C, либо C — начальный сегмент B. $\square$

Предложение 8.11 *A, B — в.у.м. Тогда $A \cong B_0$ — начальный сегмент B, либо $B \cong A_0$ — начальный сегмент A.*

Доказательство. $U \leqslant \{f : A_0 \to B_0 \mid f$ — изоморфизм, A_0 — начальный сегмент $A,\ B_0$ начальный сегмент $B\}$. $\emptyset \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$.

Рассмотрим $f_1 : A \to B_1,\ f_2 : A_2 \to B_2,\ f_1, f_2 \in U$. Пусть A_1 — начальный сегмент A_2. $f_1 : A_1 \to B_1,\ f_2 \upharpoonright_{A_1}$: $A_1 \to B$ — изоморфное вложение $\Rightarrow f_1 = f_2 \upharpoonright_{A_1}$, то есть $f_1 \subseteq f_2$. $h \leqslant \bigcup_{f \in U} f,\ domU = \bigcup_{f \in U} f$. Если $domh = A$ или $imh = B$, $A' = \bigcup_{f \in U} domf$, $B' = \bigcup_{f \in U} imf$. Пусть $a, b \in A' \Rightarrow \exists f, g \in U\ :\ a \in domf, b \in domg$, пусть $f \subseteq g \Rightarrow a, b \in domg$, пусть $a \leq b$, тогда $h(a) = g(a) \leq g(b) = h(b) \Rightarrow h$ — изоморфизм.

Пусть $a = \min A \setminus A',\ b = \min B \setminus B'$. $h' \leqslant h \cup (a, b)$, то есть $domh' \leqslant domh \cup \{a\}$. $h' \supseteq h,\ h'(a) = b$. $A' \cup \{a\}$ — начальный сегмент A, $B' \cup \{b\}$ — начальный сегмент B, h' — изоморфизм $\Rightarrow h' \in U \Rightarrow domh' \subseteq domh \Rightarrow a \in domh = A'$ — противоречие $\Rightarrow A = A'$, либо $B = B'$. Пусть $A = A'$ $\Rightarrow h : A \to B'$ — изоморфизм, B' — начальный сегмент B. $\square$

Предложение 8.12 *A — л.у.м, B, C — начальные сегменты A. Тогда B — начальный сегмент C, либо C — начальный сегмент B.*

Доказательство. Пусть $C \not\subseteq B,\ B \not\subseteq C \Rightarrow \exists b \in B \setminus C$ и $c \in C \setminus B$ $b, c \in A$ — л.у.м. $\Rightarrow b \leq c$ или $c \leq b$. Пусть $b \leq c \in C \Rightarrow b \in C$, так как C — начальный сегмент A — противоречие $\Rightarrow B \subseteq C$ либо $C \subseteq B$. Пусть $B \subseteq C$, пусть $b \in B,\ c \leq b,\ c \in C \Rightarrow c \in A$, B — начальный сегмент $A \Rightarrow c \in B \Rightarrow B$ — начальный сегмент C. □

Теорема 8.13 (О трихотомии) *$\forall A, B$ выполнено $\|A\| < \|B\|$, либо $\|A\| = \|B\|$, либо $\|A\| > \|B\|$.*

Доказательство. Даны $A, B \Rightarrow \exists\langle A, \leq\rangle,\ \langle B, \leq\rangle$ — в.у.м. $\Rightarrow \exists f : \langle A, \leq\rangle \to \langle B, \leq\rangle$ — изоморфное вложение, либо $\exists g : \langle B, \leq\rangle \to \langle A, \leq\rangle$ — изоморфное вложение $\Rightarrow \|A\| \leq \|B\|$, либо $\|B\| \leq \|A\| \Rightarrow \|A\| < \|B\|$, либо $\|A\| = \|B\|$, либо $\|B\| < \|A\|$. □

9 Ординалы и кардиналы

Определение 9.1 *Множество α называется ординалом, если*

1. *$\langle \alpha, \leq\rangle$ — в.у.м, где $\forall \beta, \gamma \in \alpha\ \beta \leq \gamma\ :\ \beta \in \gamma$, либо $\beta = \gamma$,*

2. *$\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \subseteq \alpha$, то есть $\gamma \in \beta \in \alpha \to \gamma \in \alpha$.*

Все элементы α — это множества.

Замечание 9.2 *Если $\alpha \in \beta$, β — ординал, то α — ординал.*

Доказательство.

1. $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \langle \alpha, \leq\rangle$ — в.у.м.

2. $\delta \in \gamma \in \alpha \Rightarrow \alpha, \gamma, \delta \in \beta \Rightarrow \delta \in \alpha$, то есть $\gamma \subseteq \alpha$. □

α, β — ординалы, $\alpha \leq \beta$ $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$.

Ординалы : $\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$.

$\alpha + 1 \lneqq \alpha \cup \{\alpha\}$. $\alpha = \bigcup_\beta \beta \subset \alpha$. $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$.

Предложение 9.3 *Пусть α, β — ординалы. Тогда $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta \in \alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим $\gamma \leqslant \alpha \cap \beta$. покажем, что γ — начальный сегмент α, β. Пусть $a \leq b, b \in \gamma,\ a \in \alpha \Rightarrow b \in \alpha, b \in \beta \Rightarrow b \subseteq \alpha, b \subseteq \beta$. Пусть $a < b$, то есть $a \in b \Rightarrow a \in \alpha, a \in \beta \Rightarrow a \in \gamma \Rightarrow \gamma$ — начальный сегмент α, β.

Предположим, что $\gamma \neq \alpha, \gamma \neq \beta$. $\delta_1 \leqslant \min(\alpha \setminus \gamma), \delta_2 \leqslant \min(\beta \setminus \gamma)$. Покажем, что $\delta_1 = \gamma$. Пусть $\varepsilon \in \gamma \Rightarrow \varepsilon \in \alpha, \delta_{\in}\alpha \Rightarrow \varepsilon \leq \delta_1 \Rightarrow \delta \neq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \in \delta_1 \Rightarrow \gamma \subseteq \delta_1$.

Пусть $\varepsilon \in \delta_1 \Rightarrow \delta_1 > \varepsilon, \varepsilon \in \alpha \Rightarrow \varepsilon \notin \alpha \setminus \gamma \Rightarrow \varepsilon \in \gamma \Rightarrow \delta_1 \subseteq \gamma \Rightarrow \delta_1 = \gamma$.

Аналогично, $\delta_1 = \delta_2$, так как $\gamma = \delta_2 \Rightarrow \gamma \in \alpha, \gamma \in \beta \Rightarrow \gamma \in \gamma$ — противоречие $\Rightarrow \gamma = \alpha$ либо $\alpha = \beta$, то есть $\alpha \subseteq \beta$ либо $\beta \subseteq \alpha$.

Пусть $\alpha \neq \beta, \alpha \subseteq \beta$, то есть $\gamma \in \beta$, то есть $\alpha \in \beta$. □

Замечание 9.4 *α, β — ординалы, $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha$ — начальный сегмент β.*

Доказательство. $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subseteq \beta$. Пусть $\gamma \subseteq \beta, \gamma < \delta, \delta \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \delta, \delta \subseteq \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha \Rightarrow \alpha$ — начальный сегмент β. □

Обозначение : X — множество ординалов, $\bigcup X \leqslant \bigcup_{\alpha \in X} \alpha$.

Предложение 9.5 *X — множество ординалов $\Rightarrow \bigcup X$ — ординал.*

Доказательство.

1. $\bigcup X$ — в.у.м. $\gamma, \delta \in X\ :\ \gamma \in \alpha, \delta \in \beta, \alpha \subseteq \beta$, либо $\beta \subseteq \alpha$.

   Пусть $Y \subseteq \bigcup X, Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists \alpha \in Y$.

   $Z \leqslant \alpha \cap Y \subseteq \alpha \Rightarrow \exists a = \min Z$. $a \in \alpha \Rightarrow a$ — ординал.

   Пусть $\beta \in Y$, β — ординал. Пусть $a \not\leq \beta \Rightarrow \beta < a$, то есть $\beta \in a, a \in \alpha \Rightarrow a \subseteq \alpha \Rightarrow \beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in Z$ — противоречие $\Rightarrow a \leq \beta$, то есть $a = \min Y \Rightarrow \bigcup X$ — в.у.м. $\Rightarrow \bigcup X$ — ординал.

2. $\alpha \in \bigcup X \Rightarrow \exists \beta \in X\ :\ \alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subseteq \beta, \beta \subseteq \bigcup X \Rightarrow \alpha \subseteq \bigcup X$. □

Предложение 9.6 *X — множество ординалов $\Rightarrow X$ — в.у.м.*

Доказательство. $\alpha \leqslant \bigcup X + 1 = \bigcup X \cup \{\bigcup X\}$. Покажем, что $X \leq \alpha$. Пусть $\beta \in X$, $\bigcup X$ — ординал $\Rightarrow \beta \subseteq \bigcup X \Rightarrow \beta \leq \bigcup X \Rightarrow \beta < \alpha$, то есть $\beta \in \alpha \Rightarrow X \subseteq \alpha$, α — в.у.м. $\Rightarrow X$ — в.у.м. □

Теорема 9.7 *Пусть L — в.у.м. $\Rightarrow \exists \alpha$ — ординал : $\alpha \cong L$.*

Доказательство. $X \leqslant \{\alpha \mid \exists f_\alpha : \alpha \to L_\alpha, f_\alpha$ — изоморфизм, L_α — начальный сегмент $L\}$.

$\emptyset$ — начальный сегмент L, $f_\emptyset : \emptyset \to \emptyset \Rightarrow \emptyset \in X \neq \emptyset$.

Заметим : $\alpha, \beta \in X, \alpha < \beta \Rightarrow f_\beta \uparrow_\alpha = f_\alpha$, f_β сужение на α.

Рис.

$f_\alpha \subseteq f_\beta$

$\gamma \leqslant \bigcup X, f_\gamma \leqslant \bigcup_{\alpha\in\gamma} f_\alpha$, $l_\gamma \leqslant \bigcup_{\alpha\in\gamma} L_\gamma$. Пусть $L_\gamma \neq L, f_\gamma : \gamma \to L_\gamma \Rightarrow \exists a = \min(L \setminus L_\gamma)$, $L_{\gamma+1} \leqslant L_\gamma \cup \{a\}$, $f_{\gamma+1} : \gamma + 1 \to L_{\gamma+1}$. $f_{\gamma+1} \supseteq f_\gamma$, $f_{\gamma+1}(\gamma) = a \Rightarrow \gamma + 1 \in X$ — противоречие $\Rightarrow \gamma \in \gamma+1 \Rightarrow \gamma \in \bigcup X = \gamma \Rightarrow L_\gamma = L$, то есть $f_\gamma : \gamma \to L$ — изоморфизм. □

Определение 9.8 *Ординал α — кардинал, $\alpha = \min\{\beta \mid \|\beta\| = \|\alpha\|\}$.*

Теорема 9.9 *Для любого множества A существует кардинал α: $\|\alpha\| = \|A\|$.*

Доказательство. A — множество, $\langle A, \leq\rangle$ — в.у.м. $\Rightarrow \exists$ ординал $\beta \cong \langle A, \leq\rangle$, $X = \{\gamma \mid \|\gamma\| = \|\beta\|\}$, $X \neq \emptyset \Rightarrow \exists\alpha = \min X \Rightarrow \alpha$ — кардинал, $\|\alpha\| = \|A\|$. □

α — кардинал, $\|\alpha\| = \|A\|$, $\|A\| = \alpha$.

Определение 9.10 *Ординал α называется предельным, если для любого ординала β $\alpha \neq \beta + 1$.*

Замечание 9.11 *Любой кардинал — предельный ординал.*

Доказательство. α — бесконечный кардинал. (От противного) Пусть $\alpha = \beta + 1 \Rightarrow \beta$ — бесконечно $\Rightarrow \alpha = \beta \cup \{\beta\} = \|\alpha\| = \|\beta\|$, $\beta < \alpha$ — противоречие. □

Замечание 9.12 *Для любого ординала (в частности, кардинала) существует множество множеств A, точнее $\forall B, C \in A$, они бесконечны $\|B\| \neq \|C\|$, $\langle A, \|\cdot\|\rangle$, $\langle\|\cdot\| \cong \alpha$, в частности $\|A\| = \|\alpha\|$.*

Доказательство. α — ординал. $f(\emptyset) = \mathbb{N}$, $f(1) = 2^{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f(\beta+1) = 2^{f(\beta)} = \mathcal{P}(f(\beta))$. β — предельная, то $f(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma)$. □

Предложение 9.13 *Если $\|A\| \leq \|B\|$, то $\|A\| = \|A \cup B\|$.*

Доказательство. C : $\|A\| = \|(B \setminus A) \cup C\|$. $\|A\| \leq \|A \cup B\| \leq \|A \cup B \cup C\| = \|A\|$. $\|A \cap B\| = \emptyset$, $\|A\| = \|B\| = \alpha$ — кардинал. $\Rightarrow \exists f : \alpha \to A$ и $g : \alpha \to B$, $h : \alpha \to (A \cup B)$, $h(\emptyset) = f(\emptyset)$, $h(1) = g(0)$, $h(2n) = f(n)$, $h(2n+1) = g(n)$, $h(\omega) = f(\omega)$, $h(\omega+1) = g(\omega)$, $h(\omega+2) = f(\omega+1)$, $h(\omega+3) = g(\omega+1)$.

α — предельное $h(\alpha) = f(\alpha)$, $h(\alpha+1) = g(\alpha) \Rightarrow h(\alpha+2n) = f(\alpha+n)$, $h(\alpha+2n+1) = g(\alpha+n)$, $n \leq 1$. □.

Предложение 9.14 A *— бесконечно* $\Rightarrow \|A^2\| = \|A\|$.

Логика предикатов

1 Алгебраические системы

Определение 1.1 $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$.

$P \subseteq A^n$ — n-арный предикат (n-местное отношение).

$f : A^n \to A$ — n-местная операция.

$f \to \Gamma_f \lesseqgtr \{(x_1, \ldots, x_n, y) \mid f(\bar{x}) = y\}$.
$\langle A, P_1, \ldots, P_n, f_1, \ldots, f_k, C_1, \ldots, C_l\rangle$.
$\langle A, f_1, \ldots, f_k, C_1, \ldots, C_l\rangle$ — алгебра.
$\langle A, P_1, \ldots, P_n\rangle$ — модель.
$\langle P_1^{r_1}, \ldots, P_n^{r_n}, f_1^{t_1}, \ldots, f_k^{t_k}, C_1, \ldots, C_l\rangle$ — сигнатура.

Пример. $\left.\begin{array}{l} \langle \mathbb{N},\ +,\ \bullet,\ 1\rangle, \\ \langle \mathbb{Z},\ +,\ \bullet,\ 0,\ 1\rangle \text{ — кольцо целых чисел}, \\ \langle \mathbb{R},\ +,\ \bullet,\ 0,\ 1\rangle \text{ — поле вещественных чисел} \end{array}\right\}$

$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ — модель.
Модели $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, α, $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$.

Определение 1.2 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *— модели сигнатуры σ.*
$\mathfrak{A} = \langle A,\ \sigma\rangle$, A — основное множество или универсум, $A = |\mathfrak{A}|$.
$\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ — подмодель или подсистема $\mathfrak{B}$, если :

1. $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$,

2. $\forall P, f, C \in \sigma,\ \forall a_1, \ldots, a_n,\ a \in |\mathfrak{A}|$:

   а) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)$,
   б) $\mathfrak{A} \models (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a) \iff \mathfrak{B} \models (f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) = a)$,
   в) $C^{\mathfrak{A}} = C^{\mathfrak{B}}$.

$f : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ — гомоморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ $\forall P, h, C \in \sigma$ $\forall a_1, \ldots a_n \in \mathfrak{A}$:

а) $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \to \mathfrak{B} \models P(f(a_1), \ldots, f(a_n))$,

б) $h(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = f(h(a_1, \ldots, a_n))$,

в) $f(C^{\mathfrak{A}}) = C^{\mathfrak{B}}$.

f — *эпиморфизм* : $f(|\mathfrak{A}|) = |\mathfrak{B}|$, f — *гомоморфизм.*
f — *изоморфизм, если* $f^{-1} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ — *гомоморфизм.*
$f : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ — *изоморфизм* $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.
f — *взамно-однозначно* : $\forall P, h, C \in \sigma,\ \forall a_1, \dots, a_n,\ a \in \mathfrak{A}$:

а) $\mathfrak{A} \models P(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models P(f(a_1), \dots, f(a_n))$,

б) $h(f(a_1), \dots, f(a_n)) = f(h(a_1, \dots, a_n))$,

в) $f(C^{\mathfrak{A}}) = C^{\mathfrak{B}}$.

f — *изоморфное вложение* : f — *разнозначное.*

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \cong \langle a\mathbb{N}, \leq \rangle$.
$f : \langle \mathbb{N},\ +,\ \bullet,\ 0,\ 1 \rangle \to \langle \mathbb{R},\ +,\ \bullet,\ 0,\ 1 \rangle$.

Определение 1.3 $\mathfrak{A}$ — *модель сигнатуры* σ, $X \subseteq |\mathfrak{A}|$, X *замкнуто относительно операции, если* $\forall C, f \in \sigma\ \forall a_1, \dots, a_n \in X$ *выполняется* $C, f(a_1, \dots, a_n) \in X$.

Предложение 1.4 $\mathfrak{A}$ — *модель,* $X \subseteq \mathfrak{A}$. *Тогда* X — *замкнуто относительно опреации* $\iff \exists \mathfrak{Z} \leq \mathfrak{A}\ :\ |\mathfrak{Z}| = X$.

Доказательство.
$(\Rightarrow)$ $\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{A}$, $|\mathfrak{Z}| = X, C, f^n \in \sigma, a_1, \dots, a_n \in X \Rightarrow C = C^{\mathfrak{A}} = C^{\mathfrak{B}} \in |\mathfrak{Z}| = X$.
$a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{Z} = f(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{Z}}(a_1, \dots, a_n) \in |\mathfrak{Z}| = X$.
$(\Leftarrow)$ $X \leq \mathfrak{A}$, X — замкнуто относительно операции. $\mathfrak{Z} \leqslant \langle X, \sigma \rangle$. Если $C \in \sigma$, то $C^{\mathfrak{Z}} \leqslant C^{\mathfrak{A}} \in X$. $P^{\mathfrak{Z}} \leqslant P^{\mathfrak{A}} |_{\mathfrak{Z}} \leqslant P^{\mathfrak{A}} \cap |\mathfrak{Z}|$. $f^{\mathfrak{Z}} \leqslant f_{\mathfrak{A}} |_{\mathfrak{Z}}$.
$dom f^n \leqslant X^n$, $\forall a_1, \dots, a_n \in X\ f^{\mathfrak{Z}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{Z} \leq \mathfrak{A}$. $\square$

Замечание 1.5 *Рассмотрим* $U\ :\ \forall \alpha \in U\ \alpha \subseteq \mathfrak{A}$. *Тогда* $\bigcap_{\alpha \in U} \alpha$ — *модель сигнатуры* σ, $\bigcap_{\alpha \in U} \alpha \leq \mathfrak{A}$.

Доказательство. $Y \leqslant \bigcap_{\alpha \in U} |\alpha|$. Y замкнуто тносительно операции: пусть $C, f^n \in \sigma\ a_1, \dots, a_n \in Y \forall \alpha \in U\ C \in \alpha \Rightarrow C \in Y$; $\forall \alpha \in U\ f(a_1, \dots, a_n) \in \alpha \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \in Y \Rightarrow Y$ — замкнуто относительно операции $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in U} \alpha \leq \mathfrak{A}$. $\square$

Предложение 1.6 $\mathfrak{A}$ — *модель,* $X \subseteq \mathfrak{A}$. *Тогда существует наименьший по включению* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}\ :\ X \subseteq \mathfrak{B}$. $\mathfrak{B} \leqslant sub_{\mathfrak{A}}(X)$, $\mathfrak{B}$ — *подмодель модели* $\mathfrak{A}$, *порожденная множеством* X.

Доказательство. $U \leqslant \{\alpha \subseteq \mathfrak{A} \mid X \leq \alpha\}$. $\mathfrak{A} \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$. $\mathfrak{B} \leqslant \bigcap_{\alpha \in U} \alpha \Rightarrow \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}, \forall \alpha \leq \mathfrak{A},\ |\mathfrak{B}| \leq |\alpha|\ (\Rightarrow \mathfrak{B} \leq \alpha), \forall \alpha \in U\ X \subseteq \alpha \Rightarrow X \subseteq \mathfrak{B}$. $\square$

2 Формулы логики предикатов

Определение 2.1 *Термы сигнатуры* σ

1. $C \in \sigma$, x *— переменная, то* x *и* c *— термы,*

2. $t_1, \ldots, t_n$ *— термы,* $f^n \in \sigma$, *то* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *— терм,*

3. *других термов нет.*

Определение 2.2 *Формулы сигнатуры* σ

1. $t_1, \ldots, t_n, q$ *— термы,* $P^n \in \sigma$, *то* $P(t_1, \ldots, t_n)$, $t_1 = q$ *— формулы,*

2. φ_1, φ_2 *— формулы,* $(\varphi_1 \ \& \ \varphi_2)$, $(\varphi_1 \ \vee \ \varphi_2)$, $(\varphi_1 \to \varphi_2)$, $\neg\varphi_1$, $\forall x \in \varphi$, $\exists x\varphi$ *— формулы,*

3. *других формул нет.*

Определение 2.3 *Подформулой формулы* φ *называется подслово, которое является формулой.*
Если φ *— формула* $\forall x\psi$ *(или* $\exists x\psi$*) подформула формулы* φ, *то* ψ *называется областью действия квантора для* $\forall x$ *(*$\exists x$*).*
Вхождение переменной, находящейся в области действия квантора по этой переменной, называется связанным вхождением.
Если вхождение переменной не является связанным, то оно называется свободным вхождением.
Если все вхождения данной переменной являются связанными, то переменная называется связанной.
Если переменная имеет хотя бы одно свободное вхождение, то она называется свободной.
Любая переменная является либо свободной, либо связанной.

Обозначения $FV(\varphi)$ — множество свободных переменных формулы φ.
Если $FV(\varphi) = \emptyset \Rightarrow \varphi$ — предложение.
$T(\sigma)$ — множество термов сигнатуры σ.
$F(\sigma)$ — множество формул сигнатуры σ.
$S(\sigma)$ — множество предложений сигнатуры σ.
$K(\sigma) \lesseqgtr K_\sigma$ — класс всех моделей сигнатуры σ.

Замечание 2.4 *Если* $\sigma \leq \sigma$, *то* $T(\sigma_1) \subseteq T(\sigma)$, $F(\sigma_1) \subseteq F(\sigma)$, $S(\sigma_1) \subseteq S(\sigma)$, $K(\sigma_1) \cap K(\sigma) = \emptyset$.

Определение 2.5 *Истинность формулы на модели.* $\{FV(t)$ — *множество переменных терма* $t\}$, X — *множество переменных,* $\mathfrak{A}$ — *модель, то* $\gamma : X \to |\mathfrak{A}|$ — *интерпретация (означивание) переменных* X *на модель* $\mathfrak{A}$.

а) *Значение терма : пусть* $\gamma : FV(t) \to |\mathfrak{A}|$ $t^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t[\gamma]$

1. $t = c$ $t^{\mathfrak{A}}[\gamma] \leqslant c^{\mathfrak{A}}$, $t = x$ $t^{\mathfrak{A}}[\gamma] \leqslant \gamma(x)$,
2. $f^n \in \sigma$, $t_1, \ldots, t_n \in T(\sigma)$, *то* $f(t_1, \ldots, t_n)[\gamma] \leqslant f^{\mathfrak{A}}(t_1[\gamma], \ldots, t_n[\gamma])$.

б) *Истинность формул.* $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, $\varphi \in F(\sigma)$, $\gamma : FV(\varphi) \to |\mathfrak{A}|$

1. $\varphi = (t_1 = t_2)$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t_2^{\mathfrak{A}}[\gamma]$, $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma])$.
2. $\mathfrak{A} \models (\varphi \underset{\to}{\overset{\vee}{\&}} \psi)[\varphi] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \underset{\to}{\overset{\vee}{\&}} \mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$,
   $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \not\models \varphi[\gamma]$,
   $\mathfrak{A} \models (\forall x\ \varphi)[\gamma] \iff \forall a \in \mathfrak{A}\ \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma_a^x]$,
   $\mathfrak{A} \models (\exists x\ \varphi)[\gamma] \iff \exists a \in \mathfrak{A}\ \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma_a^x]$.

Пример 2.6 $\mathfrak{N} \leqslant \langle \mathbb{N},\ +,\ \bullet,\ 0,\ 1 \rangle$, $\mathfrak{N} \not\models \forall x\ \forall y\ (x + y = x)$, $\mathfrak{N} \models (x + y = x)[{x \atop 1},\ {y \atop 0}]$, $\mathfrak{N} \models \forall x\ (x + y = x)[{y \atop 0}]$, $\mathfrak{N} \models \exists x\ \exists y\ (x + y = x)$, $\mathfrak{N} \models \forall x\ \forall y\ (x + y = y + x)$, $\mathfrak{N} \not\models \forall x\ (x + y = x)[{y \atop 1}]$.

$$FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\},\ \varphi(x_1, \ldots, x_n),\ \varphi(a_1, \ldots, a_n) \leqslant \varphi[{x_1, \ldots, x_n \atop a_1, \ldots a_n}].$$

3 Семантическая эквивалентность формул

Определение 3.1 *Формула называется тождественно истинной, если она истинна на любой модели при любом означивании (при любых значениях) свободных переменных.*
Формула называется тождественно ложной, если она ложна на любой модели при любом означивании свободных переменных.
Формула называется выполнимой, если она не является тождественно ложной.
Формула называется опровержимой, если она не является тождественно истинной.
Формулы φ *и* ψ *называются семантически эквивалентными* ($\varphi \sim \psi$), *если* $\forall \mathfrak{A}\ \forall \gamma\ \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$.

Упражнение. Формула тождественно истинна $\iff$ ее отрицание тождественно ложно.

Предложение 3.2 *Имеют место следующие эквивалентности:*
а) $\neg\forall x\ \varphi \sim \exists x\ \neg\varphi$,
б) $\neg\exists x\ \varphi \sim \forall x\ \neg\varphi$,
в) $\forall x\ (\varphi\ \&\ \psi) \sim \forall x\ \varphi\ \&\ \forall x\ \psi$,
г) $\exists x\ (\varphi\ \vee\ \psi) \sim \exists x\ \varphi\ \vee\ \forall x\ \psi$,
$x \notin FV(\xi)$
д) $\forall x\ (\varphi\ \&\ \xi) \sim (\forall x\ \varphi)\ \&\ \xi$,
е) $\exists x\ (\varphi\ \&\ \xi) \sim (\exists x\ \varphi)\ \&\ \xi$,
ж) $\forall x\ (\varphi\ \vee\ \xi) \sim (\forall x\ \varphi)\ \vee\ \xi$,
з) $\exists x\ (\varphi\ \vee\ \xi) \sim (\exists x\ \varphi)\ \vee\ \xi$,
и) $\forall x\ \varphi(x) \sim \forall y\ \varphi(y)$,
к) $\exists x\ \varphi(x) \sim \exists y\ \varphi(y)$.

Доказательство. $FV(\varphi) = \{x, x_1, \dots x_n\}$, $\mathfrak{A}$ — модель, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$. $\mathfrak{A} \models \neg\forall x\varphi(x, a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{A} \not\models \forall x\varphi(x, a_1, \dots, a_n) \iff \exists b \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \not\models \varphi(b, a_1, \dots, a_n) \iff \exists b\ \mathfrak{A} \models \neg\varphi(b, a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{A} \models \exists x\ \neg\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ □

Замечание 3.3 *Существуют формулы* $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ *такие, что*

а) $\forall x\ (\varphi_1\ \vee\ \psi_1) \not\sim \forall x\ \varphi_1\ \vee\ \forall x\ \psi_1$,

б) $\exists x\ (\varphi_2\ \&\ \psi_2) \not\sim \exists x\ \varphi_2\ \&\ \exists x\ \psi_2$.

Доказательство.

а) Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим $\varphi_1(x) \lesseqgtr x > 3$, $\psi_2 \lesseqgtr x \le 3$. $\mathbb{N} \models \forall x\ (x > 3\ \vee\ x \le 3)$, $\mathbb{N} \not\models \forall x\ (x > 3)\ \vee\ \forall x\ (x \le 3)$.

б) $\mathbb{N} \not\models \exists x\ (x > 3\ \&\ x \le 3)$, $\mathbb{N} \models \exists x\ (x > 3)\ \&\ \exists x\ (x \le 3)$. □

4 Исчисление предикатов

Аксиомы ИП

1. $\varphi \vdash \varphi$,

2. $\vdash \forall x\ (x = x)$,

3. $\vdash \forall x\ \forall y\ (x = y \to y = x)$,

4. $\vdash \forall x\ \forall y\ \forall z\ (((x = y)\ \&\ (y = z)) \to (x = z))$,

5. $t_1 = q_1, \ldots, t_n = q_n,\ \varphi(t_1, \ldots, t_n) \vdash \varphi(q_1, \ldots, q_n)$.
$\varphi(t_1, \ldots, t_n) \lesseqgtr \varphi(x_1, \ldots, x_n)[^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots t_n}]$.

Правила вывода.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi\ \&\ \psi)}$ 2. $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi\ \&\ \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$

3. $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi\ \&\ \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$ 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi\ \vee\ \psi)}$

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi\ \vee\ \psi)}$ 6. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \xi,\ \Gamma, \psi \vdash \xi,\ \Gamma \vdash (\varphi\ \&\ \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$

7. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$ 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$ 10. $\dfrac{\Gamma, \vdash \varphi; \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash}$

11. $\dfrac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \xi}$ 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$

13. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}$ $x \notin FV(\Gamma$ 14. $\dfrac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\ \varphi \vdash \psi}$

15. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}$ 16. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\ \varphi \vdash \psi}$ $x \notin FV(\Gamma, \psi)$

Замечание 4.1 *а) Если секвенция получена подстановкой в секвенцию, доказуемую в исчислении высказываний, вместо пропозициональных переменных формул исчисления предикатов, то эта секвенция доказуема в исчислении предикатов.*

б) Правило вывода, допустимое в исчислении высказываний, является допустимым в исчислении предикатов.

Предложение 4.2 *Допустимые:*

а) $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi(x)}{\Gamma \vdash \varphi}$ *б)* $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi\ \&\ \xi) \vdash (\psi\ \&\ \xi)}$

в) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi\ \&\ \varphi) \vdash (\xi\ \&\ \psi)}$ *г)* $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi\ \vee\ \xi) \vdash (\psi\ \vee\ \xi)}$

д) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi\ \vee\ \varphi) \vdash (\xi\ \vee\ \psi)}$ *е)* $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \varphi}$

ж) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \to \varphi) \vdash (\xi \to \psi}$ *з)* $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\psi \to \xi) \vdash (\varphi \to \xi}$

и) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\forall x\ \varphi \vdash \forall x\ \psi}$ *к)* $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\ \varphi \vdash \exists x\ \psi}$

Обозначения. $\varphi \equiv \varphi_1\ :\ \varphi \vdash \varphi_1$ и $\varphi_1 \vdash \varphi$.

Теорема 4.3 (О замене) *Пусть* $\varphi \equiv \varphi_1$ *и* $\psi_1 \lesseqgtr \psi[^{\varphi}_{\varphi_1}]$. *Тогда* $\psi \equiv \psi_1$.

Доказательство. индукцией по построению ψ:

1. $\psi \equiv \varphi$. $\psi_1 = \varphi_1 \Rightarrow \psi = \varphi \equiv \varphi_1 = \psi_1$.

2. Индукционный переход. $\psi = (\psi' \overset{\vee}{\underset{\to}{\&}} \psi'')$, $\psi = \neg\psi'$, $\psi = \exists x\ \psi'$, $\psi = \forall x\ \psi'$. По индукционному предположению: $\psi_1' \lesseqgtr \psi'[^{\varphi}_{\varphi_1}]$, $\psi_2'' \lesseqgtr \psi''[^{\varphi}_{\varphi_1}]$, $\psi' = \psi_1'$, $\psi'' = \psi_1'' \Rightarrow$ по предложению 4.2

$$\frac{\dfrac{\psi' \vdash \psi_1'}{(\psi'\ \&\ \psi'') \vdash (\psi_1'\ \&\ \psi'')};\ \dfrac{\psi_1'' \vdash \psi_1''}{(\psi_1'\ \&\ \psi'') \vdash (\psi_1'\ \&\ \psi_1''}}{(\psi'\ \&\ \psi'') \vdash (\psi_1'\ \&\ \psi_1'')}$$

$\Rightarrow \psi \equiv \psi_1$. □

Определение 4.4 $\Gamma \vdash \varphi$ *— тождественоо истинна, если* $\forall\mathfrak{A}$ *сигнатуры* $\sigma\ (\Gamma\ \vee\ \{\varphi\})\ \forall\gamma\ :\ FV()\Gamma\ \vee \{\varphi\}) \to |\mathfrak{A}|$.
если $\forall\psi \in T\ \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$, *то* $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.
$\Gamma \vdash$ *— тождественно истинна, если* $\forall\mathfrak{A}\ \forall\gamma\ \exists\psi \in T\ \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma]$.
$\vdash \varphi$ *— тождественно истинна, если* φ *— тождественно истинна.*

Теорема 4.5 (О корректности) *Если секвенция доказуема, то она тождественно истинна.*

Доказательство. Индукция по длине вывода секвенции.

Предложение 4.6 *Имеют место следующее (при* $x \notin \Gamma\ \vee\ (\xi)$*):*

1. $\forall x\ \xi \equiv \xi$

2. $\exists x\ \xi \equiv \xi$

3. $\forall x\ \forall y\ \varphi(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ \varphi(x,y)$

4. $\exists x\ \exists y\ \varphi(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ \varphi(x,y)$

5. $\neg\exists x\ \varphi(x) \equiv \forall x\ \neg\varphi(x)$

6. $((\forall x\ \varphi(x))\ \&\ (\forall x\ \psi(x))) \equiv \forall x\ (\varphi(x)\ \&\ \psi(x))$

7. $((\exists x\ \varphi(x))\ \vee\ (\exists x\ \psi(x))) \equiv \exists x\ (\varphi(x)\ \vee\ \psi(x))$

8. $(\forall x\ \varphi(x)\ \&\ \xi) \equiv \forall x\ (\varphi(x)\ \&\ \xi)$

9. $(\exists x\ \varphi(x)\ \&\ \xi) \equiv \exists x\ (\varphi(x)\ \&\ \xi)$

10. $(\xi\ \&\ \forall x\ \varphi(x)) \equiv \forall x\ (\xi\ \&\ \varphi(x))$

11. $(\xi\ \&\ \exists x\ \varphi(x)) \equiv \exists x\ (\xi\ \&\ \varphi(x))$

12. $(\forall x\ \varphi(x)\ \vee\ \xi) \equiv \forall x\ (\varphi(x)\ \vee\ \xi)$

13. $(\exists x\ \varphi(x)\ \vee\ \xi) \equiv \exists x\ (\varphi(x)\ \vee\ \xi)$

14. $(\xi\ \vee\ \forall x\ \varphi(x)) \equiv \forall x\ (\xi\ \vee\ \varphi(x))$

15. $(\xi\ \vee\ \exists x\ \varphi(x)) \equiv \exists x\ (\xi\ \vee\ \varphi(x))$

16. $\forall x\ \varphi(x) \equiv \forall y\ \varphi(y)$

17. $\exists x\ \varphi(x) \equiv \exists y\ \varphi(y)$

Определение 4.7 *Формула находится в предворенной нормальной форме, если она имеет вид:* $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\ \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, φ *— бескванторная.*

Теорема 4.8 *Для каждой формулы* φ *существует* $\psi \equiv \varphi$ *такая, что* ψ *находится в предворенной нормальной форме (п.н.ф.).*

Доказательство. Алгоритм приведения формулы к п.н.ф.

1. Избавиться от импликаций.
2. С помощью тождеств 5 и 6 вносится отрицание до атомарных подформул.
3. С помощью тождеств 17 и 18 переобозначаются переменные так, чтобы переменная имела либо все связаные, либо все свободные вхождения, и чтобы разные кванторы действовали по разным переменным.
4. С помощью тождеств 9-16 выносятся наружу кванторы. □

5 Теория существования модели

Определение 5.1 $T \vdash \varphi\ :\ \exists \varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi\ :\ \forall i \leq n\ \varphi_i$ *— аксиома, либо* $\varphi_i \in T$*, либо получена из предыдущих применением правила вывода. Теорией сигнатуры* σ *называется дедуктивно замкнутое множество предложений сигнатуры* σ*, то есть:* $T \subseteq S(\sigma)$, $\forall \varphi \in S(\sigma)$ *если* $T \vdash \varphi$*, то* $\varphi \in T$*.*
T *называется полным, если множество предложений* $\forall \varphi \in S(\sigma(T))$

либо $\varphi \in T$, *либо* $\neg\varphi \in T$.
Множество предложений или формул T *— противоречиво* ($T \vdash$), *если существует конечное* $T_0 \subseteq T$ *такое, что секвенция* $T_0 \vdash$ *— доказуема.*
Множество формул непротворечиво, если оно не является противоречивым.
$\mathfrak{A}$ *— модель множества предложений* T : $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, $T \subseteq S(\sigma)$, $\mathfrak{A} \models T$: $\forall\varphi \in T\ \mathfrak{A} \models \varphi$.
Элементарной теорией модели $\mathfrak{A}$ *называется множество предложений, которое на ней истинно:* $Th\mathfrak{A} \leqslant \{\varphi \in S(\sigma(\mathfrak{A})) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$, *то* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$: $\mathfrak{A}$ *— элементарно эквивалентна* $\mathfrak{B}$, *если* $Th\mathfrak{A} = Th\mathfrak{B}$, *то есть* $\forall\varphi \in S(\sigma)\ \mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$.

Замечание 5.2 *а) Теория* T *— противоречива* $\iff T = S(\sigma(T))$.

б) Множество предложений T *противоречиво* $\iff \exists\varphi\ T \vdash \varphi,\ T \vdash \neg\varphi$.

Доказательство.
а)$\Rightarrow$ T — противоречиво $\Rightarrow \exists$ конечное $T_0 \subseteq T$: доказуемо $T_0 \vdash$. Пусть $\sigma \leqslant \sigma(T)$, $\varphi \in S(\sigma)$. $T_0 \vdash \Rightarrow T_0 \vdash \varphi$ — доказуемо $\Rightarrow T_0 \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T \Rightarrow S(\sigma \subseteq T; T \subseteq S(\sigma) \Rightarrow T = S(\sigma)$.
а)$\Leftarrow$ $T = S(\sigma) \Rightarrow \varphi, \neg\varphi \in T$. $T_0 \leqslant \{\varphi, \neg\varphi\} \Rightarrow T_0 \vdash \Rightarrow T$ — противоречиво.
б)$\Rightarrow$ T — противоречиво $\Rightarrow \exists$ конечное $T_0 \subseteq T$, $T_0 \vdash$ — доказуемо.

$$\frac{T_0 \vdash}{T_0 \vdash \varphi} \quad \frac{T_0 \vdash}{T_0 \vdash \neg\varphi}$$

$\Rightarrow T \vdash \varphi, T \vdash \neg\varphi\ (\forall\varphi \in S(\sigma))$.
б)$\Leftarrow$ $T \vdash \varphi, T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \exists T_0'$ — конечное и T_0'', $T_0', T_0'' \subseteq T$; $T_0' \vdash \varphi$, $T_0'' \vdash \neg\varphi$. Положим $T_0 \subseteq T_0' \cup T_0'' \Rightarrow T_0 \vdash \varphi$, $T_0 \vdash \neg\varphi \Rightarrow T_0 \vdash$ — доказуемо $\Rightarrow T$ — противоречиво. $\square$

Замечание 5.3 $Th\mathfrak{A}$ *— полная противоречивая теория сигнатуры* $\sigma(\mathfrak{A})$ *и* $\mathfrak{A} \models Th\mathfrak{A}$.

Доказательство. $\mathfrak{A} \models Th\mathfrak{A}$ — по определению. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi$. $\square$

Замечание 5.4 *Если* $T \subseteq S(\sigma)$, T *— противоречиво и полно в* σ, *то* T *— теория сигнатуры* σ.

Доказательство. Пусть $T \vdash \varphi$, пусть $T \not\in \varphi \Rightarrow \exists\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$. Доказательство φ из $T \Rightarrow \exists$ конечнаое $T_0 \subseteq T$, $T_0 \vdash \varphi$ — доказуемо; $\varphi \notin T \Rightarrow \neg\varphi \in T \Rightarrow T_0' \leqslant \{\neg\varphi\} \cup \{T_0\} \subseteq T$, $T_0 \vdash \varphi$, $T_0' \vdash \neg\varphi \Rightarrow T_0' \vdash \Rightarrow T$ — противоречиво $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \varphi \in T$. $\square$

$T \vdash \varphi\ \exists\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T\ :\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ — доказуема.

Определение 5.5 *Пусть X — множество переменных, $\mathfrak{A}$ — модель, $\gamma : X \to |\mathfrak{A}|$ — интерпретация. Γ — множество предложений, $FV(\Gamma) \subseteq X$. Говорят, что Γ истинна на $\mathfrak{A}$ при интерпретации γ, если $\forall \varphi \in \Gamma$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.*
$\Gamma \subseteq S(\sigma(\mathfrak{A}))$, $\mathfrak{A}$ — модель Γ, если $\forall \varphi \in \Gamma$: $\mathfrak{A} \models \varphi$.
Говорят, что Γ выполнимо на $\mathfrak{A}$, если существует интерпретация γ : $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.

Теорема 5.6 (О существовании модели) *Любое непротиворечивое множество формул имеет модель, то есть $\forall \Gamma \subseteq F(\sigma)$ если $\Gamma \nvdash$, то $\exists \mathfrak{A} \in K_\sigma$, $\gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.*

Доказательство. $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $X = FV(\Gamma)$. $\sigma \leqslant \max(\omega, \|\sigma\|, \|X\|)$. D — множество констант: $D \cap \sigma = \emptyset$ и $\|D\| = \|X\| \Rightarrow \exists$ взамнооднозначное отображение $\gamma : X \to D$.

Обозначим $\Gamma' \leqslant \Gamma[\gamma] \leqslant \{\varphi[^{\bar{X}}_{\gamma(\bar{X})}] \mid \varphi \in \Gamma\}$. тогда $\Gamma' \subseteq S(\sigma \cup D)$. Пусть C — множество констант: $C \cap (\sigma \cup D) = \emptyset$ и $\|C\| = \delta$, $\|F(\sigma)\| = \delta$, $\sigma^* \leqslant \sigma \cup D \cup C$. Заметим, что $\|\sigma^*\| = \|F(\sigma^*)\| = \delta$.

Построение: $\|S(\sigma^*)\| = \delta$, $S(\sigma^*) = \{\varphi_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ $(\delta = \{\alpha \mid \alpha < \delta\})$.
T_α $\alpha < \delta$.
шаг 0: $T_0 \leqslant \Gamma'$.
шаг $\beta > 0$.

а) $\beta = \alpha + 1$, построим T_α и рассмотрим φ_α, возможно следующее:
1. $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \vdash$, тогда $T_{\alpha+1} \leqslant T_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$.
2. $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$, но $\varphi_\alpha \neq \exists x\ \psi_\alpha(x)$. Тогда $T_{\alpha+1} \leqslant T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$.
3. $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$, $\varphi_\alpha = \exists x\ \psi_\alpha(x)$. Тогда выбираем $c \in C \setminus \sigma(T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\})$.

Докажем, что c существует. $\|C \cap \sigma(T_\alpha)\| < \delta$, так как $\|\alpha\| < \delta$. так как $\sigma(\Gamma') \cap C = \emptyset$. $\|T_\alpha \setminus \Gamma'\| < \delta$, так как $\|T_\alpha \setminus \Gamma'\| = \alpha$ (если α — бесконечно). $T_{\alpha+1} \leqslant T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c)\}$.

б) β — предельный, то $T_\beta \leqslant \bigcup_{\alpha<\beta} T_\alpha$, $T^* \leqslant T_\sigma = \bigcup \alpha < \delta T_\alpha$.

Лемма 5.7 (Хинкина) *а) T^* — непротиворечиво.*

б) $\forall \varphi \in S(\sigma^*)$ $\varphi \in T^*$, либо $\neg\varphi \in T^*$, то есть T^* — полно.

в) Если $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T^*$ и секвенция $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \psi$ доказуема, то $\psi \in T^*$, то есть T^* — теория.

(а-в) говорят, что T^* — полная непротиворечивая теория сигнатуры σ^*.

г) $(\varphi \ \& \ \psi) \in T^* \iff \varphi \in T^*$ *и* $\psi \in T^*$.

д) $(\varphi \ \vee \ \psi) \in T^* \iff \varphi \in T^*$ *или* $\psi \in T^*$.

е) $\neg\varphi \in T^* \iff \varphi \notin T^*$.

ж) $(\varphi \ \to \psi) \in T^* \iff$ *если* $\varphi \in T^*$, *то* $\psi \in T^*$.

з) $\exists x \ \varphi(x) \in T^* \iff \exists c \in C \ : \ \varphi(c) \in T^*$.

и) $\forall x \ \varphi(x) \in T^* \iff \forall c \in C \ : \ \varphi(c) \in T^* \iff \forall t \in T(\sigma^*) \ \varphi(t) \in T^*$.

к) *Для случая с равентством: если* $t \in T(\sigma^*)$, t *— замкнут, то есть* $FV(t) = \emptyset$, *то* $\exists c \in C \ (t = c) \in T^*$, *то есть* T^* *— теория Хинкина.*

Доказательство.

а) Покажем, что Γ' — непротиворечива. Γ непротворечива по условию. Пусть Γ' — противоречива. $\Rightarrow \exists$ конечное $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma'$: секвенция $\Gamma'_0 \vdash$ доказуема $\Rightarrow \exists$ дерево вывода

$$\frac{D}{\Gamma'_0 \vdash} \xrightarrow{[^{\gamma(x)}_{x}]} \frac{D}{\Gamma_0 \vdash}, \Gamma_0 \subseteq \Gamma$$

$\Rightarrow \Gamma_0 \vdash$ — доказуема $\Rightarrow \Gamma$ — противоречиво $\Rightarrow$ протворечие $\Rightarrow \Gamma'$ — непротиворечиво.

шаг 0. $T_0 \nvdash$. Пусть $\beta = \alpha + 1$, T_α — непротиворечиво. Покажем, что T_β — непротиворечиво. Пусть T_β — противоречиво.

1) $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \vdash$, $T_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\} \vdash$, то есть $T_\beta = T_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\} \Rightarrow \exists$ конечные $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq T_\alpha \ : \ $ доказуемы $\Gamma_1, \varphi\alpha \vdash$, $\ \Gamma_2, \neg\varphi_\alpha \vdash$. $\Gamma_3 \lesseqgtr \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \varphi_\alpha \vdash}{\Gamma_1 \vdash \neg\varphi_\alpha}}{\Gamma_3 \vdash \neg\varphi_\alpha} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2, \neg\varphi_\alpha \vdash}{\Gamma_2 \vdash \neg\neg\varphi_\alpha}}{\Gamma_3 \vdash \neg\neg\varphi_\alpha}}{\Gamma_3 \vdash}$$

но $\Gamma_3 \subseteq T_\alpha$ — противоречие $\Rightarrow t_\beta \nvdash$.

2) $T_\beta = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$ — по определению.

3) $T_\beta - T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c)\}$, $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$, $\varphi_\alpha = \exists x \ \psi_\alpha(x)$, $c \notin \sigma(T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\})$. Пусть $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c)\} \vdash \Rightarrow \exists \Gamma_0 \subseteq T_\alpha \ \Gamma_0$ — конечное, $\Gamma_0, \varphi_\alpha, \psi_\alpha(c) \vdash$ — доказуема.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_0, \exists x \ \psi_\alpha(x), \psi(c) \vdash}{\Gamma_0, \psi_\alpha(c) \vdash \neg\exists x \ \psi_\alpha(x)}}{\Gamma_0, \exists x \ \psi_\alpha(x) \vdash \neg\exists x \ \psi_\alpha(x)} \quad \dfrac{\exists x \ \psi_\alpha(x) \vdash \exists x \ \psi_\alpha(x)}{\Gamma_0, \exists x \ \psi_\alpha(x) \vdash \exists x \ \psi_\alpha(x)}}{\Gamma_0, \exists x \ \psi_\alpha(x) \vdash}$$

$\Rightarrow T_\alpha \cup \{\exists x\ \psi_\alpha(x)\} \vdash$ — противоречивость.

Замечание 5.8 *Пусть* $\forall \alpha < \delta\ G_\alpha \subseteq S(\sigma_0)$, G_α *— непротворечиво и* $G_\alpha \subseteq G_\gamma$ *при* $\alpha < \gamma < \delta$. *Пусть* δ *— предельный и* $G_\alpha = \bigcup_{\alpha<\delta} G_\alpha$. *Тогда* G_α *— непротиворечиво.*

Доказательство. Пусть $G_\alpha \vdash \Rightarrow \exists$ конечное $G' \subseteq G_\delta\ :\ G' \vdash$, $G' = \psi_1, \ldots, \psi_n \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n < \delta\ :\ \psi_i \in \alpha_i$. Пусть $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $\Rightarrow \alpha < \delta$, $\forall i\ \psi_i \in G_\alpha$, то есть $G' \subseteq G_\alpha$, G' — доказуема $\Rightarrow G_\alpha \vdash$ — противоречие $\Rightarrow G_\delta \nvdash$. □

б) Пусть β — предельный. $\forall \alpha < \beta\ T_\alpha \nvdash \Rightarrow$ по замечанию 5.8 $T_\beta \nvdash \Rightarrow$ $\forall \alpha < \delta\ T_\alpha \nvdash \Rightarrow T^*$.

б)(Леммы) T^* — полно. Пусть $\varphi \in S(\sigma^*)$, $\varphi \notin T^*$, $\exists \alpha < \delta\ \varphi = \varphi_\alpha \Rightarrow$ на шаге α $\varphi_\alpha \notin T_{\alpha+1} \Rightarrow \neg\varphi_\alpha \in T_{\alpha+1} \Rightarrow \neg\varphi_\alpha \in T^*$.

в) T^* — теория, так как T^* — полно и противоречиво по предложению 5.4.

г)($\Rightarrow$) Пусть $(\varphi\ \&\ \psi) \in T^*$, $\varphi\ \&\ \psi \vdash \varphi$, $\varphi\ \&\ \psi \vdash \psi$ — доказуема. $\varphi\ \&\ \psi \vdash \varphi\ \&\ \psi$

$(\varphi\ \&\ \psi) \vdash \varphi \Rightarrow$ по в) $\varphi, \psi \in T^*$.

г)($\Leftarrow$) $\varphi, \psi \in T^*$.

$$\frac{\varphi \vdash \varphi, \psi \vdash \psi}{\varphi, \psi \vdash (\varphi\ \&\ \psi)}$$

$\Rightarrow$ по в) $(\varphi\ \&\ \psi) \in T^*$.

д)($\Leftarrow$) $\varphi \vdash (\varphi\ \vee\ \psi), \psi \vdash (\varphi\ \vee\ \psi)$. Если $\varphi \in T^*$, то $(\varphi\ \vee\ \psi) \in T^*$. Если $\psi \in T^*$, то $(\varphi\ \vee\ \psi) \in T^* \Rightarrow (\varphi\ \vee\ \psi) \in T^*$.

($\Rightarrow$) Пусть $(\varphi\ \vee\ \psi) \in T^*$. От противного. Пусть $\varphi \notin T^*$ и $\psi \notin T^*$. $\Rightarrow$ по б) $\neg\varphi, \neg\psi \in T^*$. Тогда можно построить дерево вывода:

$$\cfrac{\cfrac{\neg\varphi, \neg\psi \vdash (\neg\varphi\ \&\ \neg\psi)\quad (\neg\varphi\ \&\ \neg\psi) \vdash \neg(\varphi\ \vee\ \psi)}{\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi\ \vee\ \psi)} \quad \cfrac{}{(\varphi\ \vee\ \psi \vdash (\varphi\ \vee\ \psi)}}{\neg\varphi, \neg\psi, (\varphi\ \vee\ \psi) \vdash}$$

$\Rightarrow T^*$ — противоречиво $\Rightarrow$ противоречие с а) $\Rightarrow \varphi \in T^*$ либо $\psi \in T^*$.

е)($\Rightarrow$) $\neg\varphi \in T^*$. От противного. $\varphi \in T^*$.

$$\frac{\varphi \vdash \varphi; \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\varphi, \neg\varphi \vdash}$$

$\Rightarrow T^*$ — противоречиво $\Rightarrow$ противоречие с а) $\Rightarrow \varphi \notin T^*$.

е)(⇐) $\varphi \notin T^* \Rightarrow \neg\varphi \in T^*$ по б).

ж)(⇒) $(\varphi \to \psi) \in T^*$, $\varphi \in T^*$.

$$\frac{(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi \to \psi); \varphi \vdash \varphi}{(\varphi \to \psi), \varphi \vdash \psi}$$

$\Rightarrow (\varphi \to \psi), \varphi \vdash \psi \Rightarrow$ по в) $\psi \in T^*$.

ж)(⇐) Пусть $(\varphi \to \psi) \notin T^* \Rightarrow$ по б) $\neg(\varphi \to \psi) \in T^*$. $\neg(\varphi \to \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \ \vee \ \psi) \equiv \varphi \ \& \ \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$, $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\psi$, $\Rightarrow$ по в) $\varphi, \neg\psi \in T^*$ $\Rightarrow \psi \notin T^*$ по а) — противоречие $\Rightarrow (\varphi \to \psi) \in T^*$.

з)(⇒) $\exists\alpha$ такая, что $\exists x \ \varphi(x) = \varphi_\alpha$ $\varphi_\alpha \in T^*$, то $\neg\varphi_\alpha \notin T^* \Rightarrow$ на шаге $\alpha + 1$ добавим в T^* $\varphi_\alpha \Rightarrow \exists c \in C \ : \ \varphi(c) \in T_{\alpha+1} \Rightarrow \varphi(c) \in T^*$.

з)(⇐) Пусть $\varphi(c) \in T^*$, тогда

$$\frac{\varphi(c) \vdash \varphi(x)^x_c}{\varphi(c) \vdash \exists x \ \varphi(x)}$$

$\Rightarrow \exists x \ \varphi(x) \in T^*$ по в).

и) $\forall x \ \varphi(x) \in T^* \iff$ для любого замкнутого терма $t \ : \ \varphi(t) \in T^*$ $\forall x \ \varphi(x) \simeq \neg\exists x \ \neg\varphi(x)$

$\forall x \ \varphi(x) \in T^* \iff \neg\exists x \ \neg\varphi(x) \in T^* \iff \exists x \ \neg\varphi(x) \notin T^* \iff \neg\exists c \in C \ : \ \neg\varphi(c) \in T^* \iff \forall c \in C \ \neg\varphi(c) \notin T^* \iff \forall c \in C \ \varphi(c) \in T^*$.

$$\frac{\varphi(t) \vdash \varphi(x)^x_t}{\varphi(t) \vdash \exists x \ \varphi(x)}$$

если $\varphi(t) \in T^*$, то $\exists x \ \varphi(x) \in T^*$.

к) Для случая с равентсвом $t \in T(\sigma^*)$, t — замкнут, то $\exists c \in C \ : \ (t = c) \in T^*$. Мы имеем

$$\frac{\vdash (t = x)^x_t}{\exists x \ (t = x)}$$

$(t = t) \in T^* \Rightarrow \exists x \ (t = x) \in T^* \Rightarrow \exists c \ (t = c) \in T^*$.

з') $\exists x \ \varphi(x) \in T^* \iff \exists t$ — замкнутый терм: $\varphi(t) \in T^*$. □

Лемма 5.9 *Доказуемы:*

а) $\vdash t = t$,

б) $t = q \vdash q = t$,

в) $t = q, q = s \vdash t = s$,

г) $t_1 = q_1, \dots, t_n = q_n \vdash (s)^{x_1,\dots,x_n}_{t_1,\dots,t_n} = (s)^{x_1,\dots,x_n}_{q_1,\dots,q_n}$,

д) $t_1 = q_1, \dots, t_n = q_n$, $(\varphi)^{x_1,\dots,x_n}_{t_1,\dots,t_n} \vdash (\varphi)^{x_1,\dots,x_n}_{q_1,\dots,q_n}$.

Доказательство. на семинаре.

Строим конструкцию $\mathfrak{A}^* = \langle A, \sigma^* \rangle$.

(1) Случай без равенства: $A = \{t \mid t$ — замкнутый терм сигнатуры $\sigma^*\}$.

Пусть $P^n \in \sigma$, $t_1, \dots, t_n \in A$, $\mathfrak{A} \models P^N(t_1, \dots, t_n)$ $P(t_1, \dots, t_n) \in T^*$.

$f^n \in \sigma$, $t_1, \dots, t_n \in A$ $f^{\mathfrak{A}}(t_1, \dots, t_n) \leqslant f(t_1, \dots, t_n) \in A$.

$k \in \sigma^*$ $k^{\mathfrak{A}} \leqslant k$.

Лемма 5.10 $\mathfrak{A}^* \models T^*$.

Доказательство. Индукцией по построению формул докажем, что $\forall \varphi \in S(\sigma^*)$ $\mathfrak{A}^* \models \varphi \iff \varphi \in T^*$.

1. $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ — по определению.

2. По лемме Хенкина. □

(2) Случай с равенством: $A \leqslant C \mid_\sim$ $\forall c, d \in C$ $C \sim d$: $(c = d) \in T^*$.

$A = \{[c]_\sim \mid c \in C\}$, $[c]_\sim = \{d \mid d \sim c\}$.

$P^n \in \sigma$, $c_1, \dots c_n \in C$ $\mathfrak{A} \models P(c_1, \dots, c_n)$: $P(c_1, \dots, c_n) \in T^*$.

$c_i \sim c'_i$, то $P(c_1, \dots, c_n) \vdash P(c'_1, \dots, c'_n) \Rightarrow P(\bar{c}) \in T^* \iff P(\bar{c'}) \in T^*$.

$f^n \in \sigma$, $c_1, \dots, c_n \in T^*$ $f(c_1, \dots c_n)$ — замкнутый терм $\Rightarrow$ по к) $\exists c \in C$: $(\psi(c_1, \dots, c_n) = c) \in T^*$.

Полагаем $f([c_1], \dots, [c_n]) \leqslant [c]$. Пусть $c_i \sim c'_i$, то есть $(c_i = c'_i) \in T^*$. $c_1 = c'_1, \dots, c_n = c' + n \vdash f(\bar{c}) = f(\bar{c}')$.

$f(\bar{c}) = c, f(\bar{c}') = c'$ $f(\bar{c}) = f(\bar{c}') \vdash c = c' \Rightarrow (c = c') \in T^*$, то есть $c \sim c'$.

Определение функции не зависит от выбора конкретных представителей.

$d \in \sigma^*$, d — замкнутый терм $\Rightarrow \exists c \in C$: $(d = c) \in T^*$. $d^{\mathfrak{A}} \leqslant [c]$.

Лемма 5.11 $\mathfrak{A}^* \models T^*$.

Доказательство. $\forall \varphi \in S(\sigma^*)$ $\mathfrak{A}^* \models \varphi \iff \varphi \in T^*$. Индукция по построению φ. Пусть $t, q \in T(\sigma^*)$, t, q — замкнутые термы. Индукцией по построению q и, соответственно, t покажем, что: $\mathfrak{A}^* \models t = c \iff t = c \in T^*$, c — контсанта.

1. $t = d - const$ — по определению константы.

2. $t = f(t_1, \dots, t_n)$ $\exists c_i \in C$ $t_i = c_i \in T^* \Rightarrow \mathfrak{A} \in (t_i = c_i)$.

   $\mathfrak{A} \models f(t_1, \dots t_n) = c \iff \mathfrak{A} \models f(c_1, \dots c_n) = c \iff (f(c_1, \dots, c_n) = c) \in T^* \iff (f(t_1, \dots t_n) = c) \in T^*$, то есть $(t = c) \in T^*$.

   Пусть $t, q \in T(\sigma^*)$. По лемме Хенкина $\exists c, d \in C\ :\ (t = c), (q = d) \in T^* \Rightarrow \mathfrak{A} \models (t = c), (q = d)$. Тогда $\mathfrak{A}^* \models (t = q) \iff \mathfrak{A}^* \models (c = d) \iff (c = d) \in T^* \iff (t = q) \in T^*$.

   Пусть $t_1, \dots, t_n \in T(\sigma^*)$, $P \in \sigma \Rightarrow \exists c_1, \dots c_n \in C\ :\ (t_1 = c_1), \dots, (t_n = c_n) \in T^* \Rightarrow \mathfrak{A}^* \models (t_1 = c_1), \dots (t_n = c_n) \Rightarrow \mathfrak{A}^* \models P(t_1, \dots, t_n) \equiv \mathfrak{A}^* \models P(c_1, \dots, c_n) \iff$ по определению предиката на модели $P(c_1, \dots, c_n) \in T^* \iff P(t_1, \dots t_n) \in T^*$.

   По г)-и) леммы Хенкина и по определению истинности формулы на модели $\Rightarrow \mathfrak{A}^* \models T^*$ $\square$

$\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\Gamma' = [\Gamma]^{x \in FV(\Gamma)}_{\gamma(x)}$, $\Gamma' \subseteq T^*$, D — множество констант, $\gamma : FV(\Gamma) \to D$ — разнозначное $\Rightarrow \mathfrak{A}^* \models \Gamma' \Rightarrow$ при $\gamma : FV(\Gamma) \to \mathfrak{A}$ $\forall x \in FV(\Gamma)$ $\gamma(x) = \gamma(x)^{\mathfrak{A}^*}$ $\mathfrak{A}^* \models \Gamma[\gamma]$

$\mathfrak{A} \lesseqgtr \mathfrak{A}^* \restriction \sigma$ (сужение модели до данной сигнатуры)

$F \subseteq F(\sigma)$ $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$.

$\mathfrak{A}^* \in K_{\sigma^*}$; $\sigma \leq \sigma^*$, то $\mathfrak{A} \lesseqgtr \mathfrak{A}^* \restriction \sigma\ :\ \mathfrak{A} \in K_\sigma$, $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}^*|$, $\forall P^n, f^n, c \in \sigma$ $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ $\mathfrak{A} \models P(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{A}^* \models P(a_1, \dots, a_n)$, $\mathfrak{A} \models (f(a_1, \dots, a_n) = a) \iff \mathfrak{A}^* \models (f(a_1, \dots, a_n) = a) \Rightarrow C^{\mathfrak{A}} = C^{\mathfrak{A}^*}$.

Таким образом, теорема о существовании модели доказана.

Определение 5.12 $\Gamma \subseteq F(\sigma)$.
Γ *называется совместной, если* $\exists \mathfrak{A} \in K_\sigma$ *и* $\gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma] = [\Gamma]^{x \in FV(\Gamma)}_{\gamma(x)}$.
Γ *локально совместна, если для любого конечного* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ Γ_0 *— совместно.*

Теорема 5.13 (Компактности Мальцева) *, (Локальная теорема Мальцева)* Γ *совместна* $\iff$ Γ *локально совместна.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Γ — совместна $\Rightarrow \exists \mathfrak{A}, \gamma\ :\ \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$. Пусть $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ $\Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0[\gamma] \Rightarrow \Gamma_0$ — совместно.

$(\Leftarrow)$ Пусть Γ — не совместна $\Rightarrow$ по теореме существования модели Γ — противоречива $\Rightarrow$ по определению существует конечное $\Gamma_0 \subset \Gamma\ :\ \Gamma_0$ — протворечива $\Rightarrow \Gamma_0$ — не совместна $\Rightarrow \Gamma$ не локально совместна. $\square$

φ — тождественно истинна: $\forall \mathfrak{A}, \gamma$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.

φ — доказуема, если секвенция $\vdash \varphi$ доказуема.

Теорема 5.14 (Геделя о полноте) *Любая тождественно истинная формула доказуема.*

Доказательство. (от противного) Пусть φ — тождественно истинная и φ не доказуема. Заметим, что $\dfrac{\neg\varphi \vdash}{\vdash \varphi} \Rightarrow \neg\varphi \nvdash \Rightarrow$ по теореме о существовании модели $\exists\mathfrak{A}, \gamma \ : \ \mathfrak{A} \models \neg\varphi[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\gamma]$ — противоречие с тем, что φ — тождественно истинна $\Rightarrow \varphi$ — доказуема. $\square$

Следствие 5.15 φ — *доказуема* $\iff$ φ — *тождественно истинна.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) теорема компактности.
($\Leftarrow$) теорема о полноте. $\square$

Теорема 5.16 (Мальцева о расширении) *Пусть* T — *теория и существует конечная модель* $\mathfrak{B} \models T$ *и пусть* $\alpha \geq \max(\omega, \|\sigma(T)\|$. *Тогда* $\exists\mathfrak{A} \models T \ :$ $\|\mathfrak{A}\| \geq \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим кардинал α и пусть C — множество контстант: $C \cap \sigma = \emptyset$, $\|C\| = \alpha$.

$T' \leqslant T \cup \{c \neq d \mid c, d \in c \ : \ c \neq d\}$. Покажем, что T' — локально совместно. Пусть конечное $T_0 \subseteq T'$. $C_0 \leqslant C \cap \sigma(T_0)$. C_0 — конечно. Пусть $C_0 = \{a_1, \ldots, a_n\}$. $\gamma : C_0 \to |\mathfrak{B}|$ — разнозначное и рассмотрим модель $\mathfrak{B}_0$ сигнатуры $\sigma \cup C_0$. $\forall i \leq n \ a_i^{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma(a_i)$. Тогда $\mathfrak{B} \models T \Rightarrow \mathfrak{B}_0 \models T \Rightarrow \mathfrak{B}_0 \models T \cap T_0$. Так как γ — разнозначное $\mathfrak{B}_0 \models T_0 \Rightarrow T_0$ — совместно $\Rightarrow$ T' — локально совместно $\Rightarrow T'$ — совместно $\Rightarrow \exists\mathfrak{A}' \models T'$.

Положим $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \models T' \Rightarrow \mathfrak{A} \models T$.

$\|\mathfrak{A}'\| \leq \alpha$, так как $C^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{A}' \Rightarrow \|\mathfrak{A}\| \leq \alpha$. $\square$

$K_\sigma \leqslant \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma\}$.

$\mathfrak{A} \in K_\sigma \ Th\mathfrak{A} \leqslant \{\varphi \in S(\sigma) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ — элементарная теория алгебраической системы.

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \ : \ Th\mathfrak{A} = Th\mathfrak{B} \iff \forall\varphi \in S(\sigma) \ (\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi)$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$.

Покажем, что существуют разные модели элементарной эквивалентности.

$\mathbb{N} = \langle \omega, +, \bullet, 1, 0 \rangle$

Замечание 5.17 *(о существовании нестандартных натуральных чисел)* $n \equiv \mathbb{N} \ \exists c \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ c > n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}}$.

Доказательство. $\sigma = \langle +, \bullet, 1, 0 \rangle$, $\sigma' = \langle +, \bullet, 1, 0 \rangle$. $T' \leqslant Th\mathbb{N} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{\varphi_n = (c > \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Покажем, что T' — локально совместно. Пусть $T^0 \subseteq T'$. Тогда $T_0 = (T_0 \cap Th\mathbb{N}) \cup (T_0 \cap T)$. Пусть $m = \max\{n \mid \varphi_n \in T_0\}$. Положим $\mathfrak{N}_0 \lesseqgtr \langle \mathbb{N}, C \rangle$, $C^{\mathfrak{N}_0} \lesseqgtr n+1$. Тогда $\mathfrak{N}_0 \models Th\mathbb{N} \Rightarrow \mathfrak{N}_0 \models T_0 \cap Th\mathbb{N}$. $\mathfrak{N}_0 \models \{\varphi_n \mid n \leq m\} \Rightarrow \mathfrak{N}_0 \models T_0 \cap \Gamma \Rightarrow \mathfrak{N}_0 \models T_0 \Rightarrow T_0$ — совместно $\Rightarrow T'$ — локально совместно $\Rightarrow T'$ — совместно $\Rightarrow \exists n' \models T'$.

$n \lesseqgtr n' \restriction \sigma \Rightarrow n \models Th\mathbb{N}$

$\exists c \in \mathbb{N}\ :\ c = c^{n'}\ :\ c > \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$n \equiv \mathbb{N}$. □

Упражнение. Доказать, что не существует $n \equiv \mathbb{N}$ такое, что n содержит наибольший элемент.

Определение 5.18 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq K_\sigma$. *Говорят, что* $\mathfrak{B}$ *является подмоделью модели* $\mathfrak{A}$ *и обозначается* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, *если*

а) $|\mathfrak{B}| \leq |\mathfrak{A}|$,

б)

$forallP^n, f^n, C \in \sigma\ \forall b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}\ \mathfrak{B} \models P(b_1, \ldots, b_n) \iff \mathfrak{A} \models P(b_1, \ldots, b_n)$, $f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n) = f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)$, $C^{\mathfrak{B}} = C^{\mathfrak{A}}$.

Примеры. $\sigma \lesseqgtr \langle +, \bullet, \leq, 0, 1 \rangle$

1. $\mathbb{N} \subseteq\ \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$,
2. $\mathbb{Z}_n \not\subseteq \mathbb{Z}$, так как $\mathbb{Z}_n \models \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = 0$, а $\mathbb{Z} \models \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} \neq 0$.

Предложение 5.19 *Пусть* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$, $|\mathfrak{B}| \subseteq |\mathfrak{A}|$. *Тогда* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \iff \forall \varphi \in F(\sigma)$ *такого, что* φ *— бескванторная* $\forall a_1, \ldots a_n \in \mathfrak{B}\ \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$.

Доказательство.
$(\Rightarrow)$ очевидно.

$(\Leftarrow)$ индукция по построению формулы. □

Определение 5.20 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$, $|\mathfrak{B}| \subseteq |\mathfrak{A}|$. $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ *— элементарная подмодель модели* $\mathfrak{A}$, *если* $\forall \varphi(x_1, \ldots x_n) \in F(\sigma)$, $\forall b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}\ \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}) \iff \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})$.

Предложение 5.21 (Критерий элементарной вложенности)
Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. *Тогда* $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \iff \forall \varphi = \exists x\ \psi(x, y_1, \ldots, y_n)\ \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ *выполнено* $\mathfrak{B} \models \exists x\ \psi(x, \bar{a}) \iff \exists d \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{B} \models (d, \bar{a})$.

Доказательство.
($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ и $a_1, \dots a_n \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models \exists x\ \psi(x, a_1, \dots a_n) \Rightarrow \mathfrak{A} \exists x\ \psi(x, \bar{a})$ $\Rightarrow \exists d \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{A} \models \psi(d, \bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi(d, \bar{a})$.

($\Leftarrow$) Индукция по построению формулы.

Лемма 5.22 *Пусть* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $\varphi(x_1, \dots x_n)$ — *бескванторная. Тогда* $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models$
$varphi(\bar{a})$.

Доказательство. индукция по построению φ.

1а) $\varphi = (t = q)$. Одновременная индукция по построению t и q. Тогда $\varphi(x) = (t(x) = q(x))$.

1^0 Если $t = c, q = d$ — const, то это верно по определению подсистемы.

2^0 $t = f(t_1, \dots, t_k)$. Нужно показать, что $\mathfrak{A} \models t(a_1, \dots, a_n) = q(a_1, \dots a_n)$ $\iff \mathfrak{B} \models t(\bar{a}) = q(\bar{a})$.

Пусть $\mathfrak{A} \models b_1 = t_1(\bar{a}) \& \dots \& b_k = t_k(\bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models b_1 = t_1(\bar{a}) \& \dots \& b_k = t_k(\bar{a}), b_1, \dots b_k \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models (t(\bar{a}) = q(\bar{a})) \iff \mathfrak{A} \models (f(t_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a})) = q(\bar{a}) \iff \mathfrak{A} \models f(b_1, \dots b_k) = q(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models f(t_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a})) = q(\bar{a})$, то есть $\mathfrak{B} \models t(\bar{a}) = q(\bar{a})$.

б) $\varphi(\bar{x}) = P(t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x}))$. $\exists b_1, \dots b_k \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{A} \models b_1 = t_1(\bar{a}) \& \dots \& b_k = t_k(\bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models b_1 = t_1(\bar{a}) \& \dots \& b_k = t_k(\bar{a}) \Rightarrow (\mathfrak{A} \models P(t_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a})))$ $\iff \mathfrak{A} \models P(b_1, \dots, b_k) \iff \mathfrak{B} \models P(b_1, \dots b_k) \iff \mathfrak{B} \models P(t_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a}))$,

2 $\varphi = \varphi_1\ \&\ \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 \ \vee\ \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$, $\varphi = \neg\varphi_1$.

$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{A} \models \varphi_1(\bar{a})\ \&\ \varphi_2(\bar{a}) \iff \mathfrak{A} \models \varphi_1(\bar{a})$ и $\mathfrak{A} \models \varphi_2(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi_1(\bar{a})$ и $\mathfrak{B} \models \varphi_2(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$. □

$\varphi(\bar{y}) = \exists x\ \psi(x, \bar{y})$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$

$\mathfrak{A} \models \exists x\ \psi(x, \bar{a}) \Rightarrow \exists d \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{A} \models \psi(d, \bar{a}) \Rightarrow \exists d \in \mathfrak{B}\ :\ \mathfrak{B} \models \psi(d, \bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists x\ \varphi(x, \bar{a})$.

Пусть $\mathfrak{B} \models \exists x\ \psi(x, bara) \Rightarrow \exists d \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{B} \models \psi(d, \bar{a}) \Rightarrow \exists d \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{A} \models \psi(d, \bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\ \psi(x, \bar{a})$.

$\mathfrak{A} \models \forall x\ \psi(x, \bar{a}) \iff \neg\exists x\ \neg\psi(x, \bar{a}) \iff \mathfrak{A} \not\models \exists x\ \neg\psi(x, \bar{a}) \iff \mathfrak{B} \not\models \exists x\ \neg\psi(x, \bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \neg\exists x\ \neg\psi(x, \bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \forall x\ \psi(x, \bar{a})$. □

Замечание 5.23 *Если* $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, *то* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Теорема 5.24 (Ливенгейма-Скулема вниз) *Пусть* $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, $X \subseteq |\mathfrak{A}|$, $\alpha \geq \max(\omega, \|\sigma\|, \|X\|)$, $\mathfrak{A}$ *— бесконечно* ($\alpha \leq \|\mathfrak{A}\|$). *Тогда* $\exists \mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$: $X \subseteq \mathfrak{B}$ *и* $\|\mathfrak{B}\| = \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим $Y \subseteq |\mathfrak{A}|$: $\|Y\| = \alpha$. $X_0 \leqslant X \cup Y \Rightarrow \|X_0\| = \alpha$. $X_{n+1} \leqslant X_n \cup \{a_{\varphi,\bar{b}}\} \mid \varphi = \exists \psi(x, y_1, \ldots, y_n), b_1, \ldots b_n \in X_n, \mathfrak{A} \models \psi(a_{\varphi,\bar{b}}, b_1, \ldots, b-n)\}$.

($\mathfrak{A} \models \varphi$). $B \leqslant \bigcup_n X_n$. Заметим, что $\forall n$ $\|X_n\| = \alpha \Rightarrow \|B\| = \alpha$. Нужно доказать, что B является основным множеством элементарной подсистемы.

а) $\varphi = \exists x\ \varphi(x, \bar{y})$, $b_1, \ldots, b_n \in B \Rightarrow \exists k\ b_1, \ldots b_n \in X_n$. Пусть $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b}) \Rightarrow \exists a = a_{\varphi,\bar{b}} \in X_{k+1}$: $\mathfrak{A} \models \psi(a, \bar{b}) \Rightarrow \exists a \in B$: $\mathfrak{A} \models \psi(a, \bar{b})$.

б) Покажем, что B замкнуто относительно операций. $f \in \sigma, b_1, \ldots b_n \in B \subseteq |\mathfrak{A}| \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\ (f(\bar{b}) = x) \Rightarrow$ по а) $\exists a \in B$: $\mathfrak{A} \models f(\bar{b}) = a \Rightarrow B$ — замкнуто относительно операций $\Rightarrow \exists \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$: $|\mathfrak{B}| = B$.

По а) и критерию элементарной вложенности получаем, что $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$; по условию $X \subseteq |\mathfrak{B}|$: $\|\mathfrak{B}\| = \|B\| = \alpha$. □

Определение 5.25 *Пусть* $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, $A = |\mathfrak{A}|$, $\sigma_A \leqslant \sigma \cup \{C_a \mid a \in A\}$.

Пусть в $\mathfrak{A}_A$ $\gamma : C_a \to a$, *то есть* $C_a = a$.

$\mathfrak{A}_A \in K_{\sigma_A}$ $\mathfrak{A}_A \leqslant \langle \mathfrak{A}, A \rangle = \langle \mathfrak{A}, |\mathfrak{A}| \rangle$.

Элементарной диаграммой $\mathfrak{A}$ *называется* $D(\mathfrak{A}) \leqslant \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi, \varphi$ *— бескванторная*$\}$.

Полной диаграммой $\mathfrak{A}$ *называется* $FD(\mathfrak{A}) \leqslant \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi\}$.

$C \subseteq A$ $\sigma_c \leqslant \sigma \cup \{c_A \mid d \in C\}$, $\mathfrak{A}_C \leqslant \mathfrak{A}_A \upharpoonright \sigma_c$.

Замечание 5.26 *Пусть* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$, $A = |\mathfrak{A}| \subset |\mathfrak{B}|$. *Тогда*

а) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}_A \models D(\mathfrak{A})$,

б) $\mathfrak{A} \preceq \iff \mathfrak{B}_A \models FD(\mathfrak{A})$.

Доказательство. По определению.

Теорема 5.27 (Ливенгейма-Скулема вверх) *Пусть* $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, $\alpha \geq \max(\|\mathfrak{A}\|, \|\sigma\|, \omega)$. *Тогда* $\exists \mathfrak{B}$: $\|\mathfrak{B}\| = \alpha$ *и* $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Доказательство. Дано $\mathfrak{A}$, $\alpha \geq \|\mathfrak{A}\|$, $\alpha \geq \|\sigma\|$. $\mathfrak{A}$ — бесконечная модель. $T \leqslant FD(\mathfrak{A})$, $\sigma \leqslant \sigma(\mathfrak{A})$, тогда $\sigma(T) = \sigma_A$.

$\alpha \geq \omega$, $\alpha \geq \|\sigma_A\| \Rightarrow$ по теореме Мальцева о расширении $\exists \mathcal{L}_A \models$
Рис.
$FD(\mathfrak{A})$, $\|\mathcal{L}_A\| \leq \alpha$.

$X \leqslant A = |\mathfrak{A}|$. Тогда получаем, что $\alpha \geq \|\sigma_A\|$, $\alpha \geq \|X\|$, $\alpha \geq \omega \Rightarrow \exists \mathfrak{B}_A \preceq \mathcal{L}_A$: $X \subseteq \mathfrak{B}_A$, $\|\mathfrak{B}_A\| = \alpha$.

Мы имеем: $\mathfrak{A}_A \equiv \mathcal{L}_A \equiv \mathfrak{B}_A \Rightarrow \mathfrak{B}_A \models FD(\mathfrak{A})$, так как $\mathcal{L} \models FD(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A}_A \preceq \mathfrak{B}_A$.

$\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{B}_A \restriction \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, $\|\mathfrak{B}\| = \alpha$ $\square$

6 Асксиоматизированные классы

Определение 6.1 $K_\sigma \leqslant \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ *— модель сигнатуры*$\sigma\}$.
$K \subseteq K_\sigma$, $ThK \leqslant \{\varphi \in S(\sigma) \mid K \models \varphi\}$, $K \models \varphi \ : \ \forall \mathfrak{A} \in K \ \mathfrak{A} \models \varphi$.
$\Gamma \subseteq S(\sigma)$ $K(\Gamma) \leqslant K_\sigma(\Gamma) \leqslant \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \mathfrak{A} \models \Gamma\}$.
K *— аксиоматизирован, если* $\exists \Gamma \ : \ K \models K(\Gamma)$.

Замечание 6.2 K *— аксиоматизирован* $\iff K = K(ThK)$.

Предложение 6.3 *Если K — аксиоматизирован, то K замкнут относительно элементарной эквивалентности, то есть* $\forall \mathfrak{A} \in K \ \forall \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \ \mathfrak{B} \in K$.

Доказательство. Пусть $K = K(\Gamma)$, $\mathfrak{A} \in K$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \in K$. $\square$

Предложение 6.4 *а) Если* $\Gamma_1 \subseteq \gamma_2$, *то* $K(\Gamma_2) \subseteq k(\Gamma_1)$.

б) Если $K_1 \subseteq K_2$, *то* $ThK_2 \subseteq ThK_1$.

Доказательство.

а) Пусть $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Предположим, что $\mathfrak{A} \in K(\Gamma_2) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_2 \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_1 \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(\Gamma_1) \Rightarrow K(\Gamma_2) \subseteq K(\Gamma_1)$.

б) Пусть $K_1 \subseteq K_2$ и $\varphi \in ThK_2$. Пусть $\mathfrak{A} \in K_1 \Rightarrow \mathfrak{A} \in K_2 \Rightarrow \mathfrak{A} \models ThK_2 \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \varphi \in ThK_1 \Rightarrow ThK_2 \subseteq ThK_1$. $\square$

Замечание 6.5 *В общем случае:*

а) $K \neq K(ThK)$.

б) $T \neq ThK(T)$.

Доказательство.

а) Пусть $K = \{R\}$, $\|R\| = c \Rightarrow \exists \mathfrak{A} \preceq R \ : \ \|\mathfrak{A}\| = \omega \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv R$, $\mathfrak{A} \notin K \Rightarrow \mathfrak{A} \models ThR = ThK \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(ThK) \Rightarrow K \neq K(ThK)$.

б) Пусть $T = \emptyset \Rightarrow K(T) = K_\sigma$, $\varphi = \forall x \ (x = x) \Rightarrow K_\sigma \models \varphi \Rightarrow \varphi \in Th(K_\sigma)$, $\varphi \notin T = \emptyset \Rightarrow T \neq ThK(T)$. $\square$

Предложение 6.6 *а)* $K \subseteq K(ThK)$.

б) $T \subseteq ThK(T)$.

Доказательство.

а) Пусть $\mathfrak{A} \in K$, $\varphi \in ThK \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models ThK \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(ThK)$.

б) Пусть $\varphi \in T$, $\mathfrak{A} \in K(T) \Rightarrow \mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \varphi \in ThK(T)$. □

Предложение 6.7 *а)* $K = K(ThK) \iff K$ *— аксиоматизирован. item[б)]* $T = ThK(T) \iff T$ *— теория.*

Доказательство.

а $\Rightarrow$) Очевидно по определению.

а $\Leftarrow$) Пусть $K = K(\Gamma)$. Покажем, что $K = K(ThK)$. Покажем, что $K \supseteq K(ThK)$. Пусть $\mathfrak{A} \in K(ThK) \Rightarrow \mathfrak{A} \models ThK$. $\Gamma \subseteq ThK(\Gamma)$, то есть $\Gamma \subseteq ThK \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \in K \Rightarrow K(ThK) \subseteq K \Rightarrow K = K(ThK)$.

б $\Rightarrow$) Очевидно.

б $\Leftarrow$) Пусть T — теория. Покажем, что $T \supseteq ThK(T)$. Пусть $\varphi \in ThK(T)$. Пусть $\varphi \notin T \Rightarrow T \not\vdash \varphi \Rightarrow T, \neg\varphi \not\vdash \Rightarrow$ по теореме о существовании модели $\exists \mathfrak{A} \models \varphi$ — противоречие с тем, что на $\mathfrak{A}$ истинно $\neg\varphi \Rightarrow ThK(T) \subseteq T \Rightarrow t = ThK(T)$ □

Определение 6.8 K *называется конечно-аксиоматизированным, если существует конечное* $\Gamma\ :\ K = K(\Gamma)$.

Замечание 6.9 K *— конечно-аксиоматизирован* $\iff \exists\varphi\ :\ K = K(\{\varphi\}$.

Доказательство.
($\Leftarrow$) Очевидно.
($\Rightarrow$) Пусть K — конечно-аксоиматизирован $\Rightarrow K = K \setminus \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. $\varphi \lesseqgtr \varphi_1 \& \dots \& \varphi_n$.
$\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \Rightarrow K = K(\{\varphi\})$. □

Предложение 6.10 *Если* $K = K(\{\varphi\}$, *то* $\overline{K} = K(\{\varphi\})$. *(*$\overline{K} \lesseqgtr K_\sigma \setminus K$, $\sigma = \sigma(K)$*)*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, тогда $\mathfrak{A} \in \overline{K} \iff \mathfrak{A} \notin K \iff \mathfrak{A} \not\models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \neg\varphi \Rightarrow \overline{K} = K(\{\varphi\})$. □

Следствие 6.11 *K — конечно-аксиоматизирован $\iff$ $\overline{K}$ — конечно-аксиоматизирован.*

Теорема 6.12 *K — конечно-аксиоматизирован $\iff$ $K, \overline{K}$ — аксиоматизированы.*

Доказательство.
($\Rightarrow$) K — конечно-аксиоматизирован $\Rightarrow \overline{K}$ — конечно-аксиоматизирован $\Rightarrow K, \overline{K}$ — конечно-аксоматизированы.
($\Leftarrow$) $K, \overline{K}$ — аксиоматизированы $\Rightarrow \exists T, \Gamma\ K = K(T), \overline{K} = K(\Gamma)$. Предположим, что $T \cup \Gamma \nvdash \Rightarrow \exists \mathfrak{A} \vdash T \cup \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \in K, \mathfrak{A} \in \overline{K} \Rightarrow \mathfrak{A} \notin K$ — противоречие $\Rightarrow$ $T \cup \Gamma \vdash \Rightarrow \exists$ конечное $T_0 \subseteq T$ и $\Gamma_0 \subseteq \Gamma\ :\ T_0, \Gamma_0 \vdash$.

Покажем, что $K = K(T_0)$. Пусть $\mathfrak{A} \in K \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma, \Gamma_0 \subseteq \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0$ $\Rightarrow K \leq K(\Gamma_0)$.

$\mathfrak{A} \in K(\Gamma_0)$ и пусть $\mathfrak{A} \notin K \Rightarrow \mathfrak{A} \in \overline{K} \Rightarrow \mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models T_0 \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0 \cup T_0$ — противоречие $\Rightarrow \mathfrak{A} \in K \Rightarrow K(\Gamma_0) \subseteq K \Rightarrow K = K(\Gamma_0)$. $\square$

Определение 6.13 *Если $\varphi = \exists x_1, \ldots, \exists x_n\ \psi(\bar{x}, \bar{y})$, ψ — бескванторная, то φ — $\exists$-формула.*
Если $\varphi = \forall x_1, \ldots, \forall x_n\ \psi(\bar{x}, \bar{y})$, ψ — бескванторная, то φ — $\forall$-формула.
K называется $\exists$-аксиоматизированным (экзистенциональным), если $\exists \Gamma$: $K = K(\Gamma)$ и $\forall \varphi \in \Gamma\ \varphi$ — $\exists$-формула.
K называется $\forall$-аксиоматизированным, если $\exists \Gamma\ :\ K = K(\Gamma)$ и $\forall \varphi \in \Gamma\ \varphi$ — $\forall$-формула.
K — замкнуто относительно подсистемы, если $\forall \mathfrak{A} \in K\ \forall \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}\ \mathfrak{B} \in K$.
K — замкнуто относительно надсистемы, если $\forall \mathfrak{A} \in K\ \forall \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}\ \mathfrak{B} \in K$.

Теорема 6.14 *Пусть K — аксиоматизирован. Тогда*

а) K — $\forall$-аксиоматизирован $\iff$ K замкнут относительно подсистемы.

б) K — $\exists$-аксиоматизирован $\iff$ K замкнут относительно надсистемы.

Доказательство.

а $\Rightarrow$) $K = K(\Gamma)$, $\forall \varphi \in \Gamma\ \varphi$ — $\forall$-формула. Пусть $\mathfrak{A} \in K, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Покажем, что $\mathfrak{B} \models \Gamma$.

Пусть $\varphi \in \Gamma, \varphi = \forall \bar{x}\ \psi(\bar{x}), \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathfrak{A} \models \varphi$. Пусть $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi(b_1, \ldots, b_n)$. ψ — бескванторная, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ $\Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi(b_1, \ldots, b_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \forall \bar{x}\ \psi(\bar{x})$, то есть $\mathfrak{B} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \in K$.

а $\Leftarrow$ $K = K(\Gamma)$, K — замкнуто относительно подсистемы. $\Gamma' \leqslant Th_{\forall}K \leqslant \{\varphi \mid K \models \varphi, \varphi$ — $\forall$-предложение$\}$.

Покажем, что $K = K(\Gamma')$. $K \models \Gamma'$ — по определению $\Rightarrow K \subseteq K(\Gamma')$.

Покажем, что $K(\Gamma') \subseteq K$. Пусть на $\mathfrak{A} \models \Gamma'$. Покажем, что $\mathfrak{A} \in K$. Рассмотрим $\Gamma \cup D(\mathfrak{A})$. Предположим, что $\Gamma \cup D(\mathfrak{A}) \vdash \Rightarrow \exists \varphi_1, \dots, \varphi_k \in D(\mathfrak{A})$ такие, что $\Gamma, \varphi_1, \dots, \varphi_k \vdash$. $\varphi \leqslant \varphi_1 \& \dots \& \varphi_k \in D(\mathfrak{A})$, причем $\varphi = \varphi(\bar{a})$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{A}$, $\Gamma, \varphi(\bar{a}) \vdash$, φ — бескванторная $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \neg\varphi(\bar{a}) \Rightarrow \Gamma \vdash \forall \bar{x}\ \neg\varphi(\bar{x})$.

$K \models \Gamma \Rightarrow K \models \forall \bar{x}\ \neg\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \forall \bar{x}\ \neg\varphi(\bar{x}) \in \Gamma'$, $\mathfrak{A} \models \Gamma' \Rightarrow \mathfrak{A} \models \forall \bar{x}\ \neg\varphi(\bar{x})$, $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ — противоречие $\Rightarrow \Gamma \cup D(\mathfrak{A}) \nvdash \Rightarrow \exists \mathfrak{B}_A \models \Gamma \cup D(\mathfrak{A}) \Rightarrow$ $\mathfrak{A}_A \subseteq \mathfrak{B}_A$, $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{B}_a \restriction \sigma \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Gamma$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B} \in K \Rightarrow \mathfrak{A} \in K \Rightarrow$ $K(\Gamma') \subseteq K \Rightarrow K = K(\Gamma')$, то есть K — аксиоматизирован.

б $\Rightarrow$) $K = K(\Gamma)$, $\forall \varphi \in \Gamma\ \varphi$ — $\exists$-формула, φ — предложение.

Пусть $\mathfrak{A} \in K$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\varphi \in \Gamma$, $\varphi = \exists \bar{x}\ \psi(\bar{x}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots a_n)$, ψ — бескванторная.

$\mathfrak{A} \in \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi(a_1, \dots a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists \bar{x}\ \psi(\bar{x})$, то есть $\mathfrak{B} \models \varphi \Rightarrow$ $\mathfrak{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \in K \Rightarrow K$ — замкнуто относительно подсистемы.

б $\Leftarrow$) Без доказательство. $\square$

Теорема 6.15 (Интерполяционная теорема Крейга) *Пусть $\varphi \vdash \psi$, $\sigma_0 \leqslant \sigma(\varphi) \cap \sigma(\psi)$. Тогда $\exists \xi \in S(\sigma_0)\ :\ \varphi \vdash \xi,\ \xi \vdash \psi$. ξ называется интерполянт Крейга.*

Следствие 6.16 *Пусть $\varphi \in S(\sigma)$. Тогда*

а) $\exists \psi \equiv \varphi$ такое, что $\sigma(\psi)$ — наименьшее по включению (среди $\sigma(\psi')\ :\ \psi' \equiv \varphi$).

б) Для любого сигнатурного символа из множества $\sigma(\varphi)$ можно сказать входит ли он в φ "фиктивно"или "по существу".

Доказательство.

а) От противного. Пусть есть $\psi, \sigma\ :\ \varphi \equiv \psi, \varphi \equiv \sigma$, $\sigma(\psi), \sigma(\delta)$ — минимальные по включению. Обозначим $\sigma_0 \leqslant \sigma(\psi) \cap \sigma(\delta)$. $\psi \equiv \delta \Rightarrow$ $\psi \vdash \delta, \delta \vdash \psi \Rightarrow \exists \xi\ :\ \sigma(\xi) \subseteq \sigma_0$

$\varphi \vdash \xi, \xi \vdash \delta, \delta \vdash \psi \Rightarrow \xi \vdash \psi \Rightarrow \xi \equiv \psi, \psi \equiv \varphi \Rightarrow \xi \equiv \varphi \Rightarrow \sigma(\xi) \subseteq \sigma(\psi), \sigma(\xi) \neq \sigma(\psi)$ — противоречие с минимальностью $\sigma(\psi)$.

б) Очевидно следует из а). $\square$

7 m-эквивалентность

Определение 7.1 *Пусть* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. φ *— частичный изоморфизм* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, *если* $dom\varphi \subseteq \mathfrak{A}$, $Im\varphi \subseteq \mathfrak{B}$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in dom\varphi\ \forall P, f, c \in \sigma$

1. $\mathfrak{A} \models P(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models P(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$,
2. $\mathfrak{A} \models f(a_1, \ldots a_{n-1}) = a_n \iff \mathfrak{B} \models f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n-1})) = \varphi(a_n)$,
3. $c^{\mathfrak{A}} \in dom\varphi$ *и* $c^{\mathfrak{B}} = \varphi(c^{\mathfrak{A}})$.

Определение 7.2 $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, *если* $\exists F_0, \ldots, F_m\ :\ F_i \neq \emptyset$, F_i *— множество частичных изоморфизмов из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$. $\forall k < m\ \forall f \in F_k\ \forall a \in \mathfrak{A}\ \forall b \in \mathfrak{B} \exists g, h \in F_{k+1}\ :\ a \in domg, b \in Imh, f \subseteq g, f \subseteq h$.

$f \subseteq g$:

а) $domf \subseteq domg$,

б) $\forall x \in domf\ f(x) = g(x)$.

Предложение 7.3 *Пусть* $m \in \omega$, *тогда* $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B} \iff \forall a \in \mathfrak{A}\ \forall b \in \mathfrak{B}\ \exists c \in \mathfrak{A}\ \exists d \in \mathfrak{B}\ :\ (\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, d)$, $(\mathfrak{A}, c) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.

Доказательство.
($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$, $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$. $\exists F_0, \ldots F_{m+1}\ F_0 \neq \emptyset, f \in F_0 \Rightarrow \exists g, h \in F_1\ :\ a \in domg, b \in Imh$

$d \leqslant g(a), c \leqslant h^{-1}(b)$, $G_i \leqslant \{S \in F - i\ :\ g \subseteq S\}$, $H_i \leqslant \{S \in F_{i+1}\ :\ h \subseteq S\}$

$G_0, \ldots G_m, H_0, \ldots, H_m$ удовлетворяют $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, d)$, $(\mathfrak{A}, c) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.
($\Leftarrow$) Пусть $\forall a \in \mathfrak{A}\ \forall b \in \mathfrak{B}\ \exists c \in \mathfrak{A}\ \exists d \in \mathfrak{B}\ :\ (\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, d)$ и $\mathfrak{A}, c) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.

Тогда им соответсвуют множества частичных изоморфизмов: $G_0^a, \ldots, G_m^a$ и $H_0^b, \ldots, H_m^b$. Рассмотрим f_0 такое, что $domf_0 = \{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in \sigma\}$, $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}\ F_0 \leqslant \{f_0\}$, $F -_{i+1} \leqslant (\bigcup_{a \in \mathfrak{A}} G_i^a) \cup (\bigcup_{b \in \mathfrak{B}} H_i^b)$. Тогда легко проверить, что $F_0, \ldots, F_{m+1} \to \mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$. $\square$

Предложение 7.4 $\forall \sigma\ \forall m \in \mathbb{N}$ *существует конечное множество* $X_m^\sigma \subseteq S(\sigma)$ *такое, что* $\forall \mathfrak{A} \in K_\sigma\ \exists \varphi_{\mathfrak{A},m} \in X_m^\sigma$ $(*)$ $\forall \mathfrak{B} \in K_\sigma$ *выполнено:* $(\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A},m}$.

Доказательство. $\Gamma_0^\sigma \leqslant \{P(\bar{c}, (c = d), f(\bar{c}) = d \mid P, f, \bar{c}, d \in \sigma\}$.

$X_0^\sigma \leqslant \{(\varphi(\in L)\ \&\ \psi)\ \&\ (\varphi(\in D)\ \&\ \neg\psi) \mid L \subseteq \Gamma_0, D = \Gamma_0 \setminus L\}$.

$X_{m+1}^{\sigma+1} \leqslant \{(\bigwedge_{\varphi \in L} \exists x\ [\varphi]_x^c)\ \wedge\ (\bigwedge_{\psi \in D} \neg\exists x\ [\psi]_x^c) \mid L \subseteq X_m^{\sigma \cup \{c\}}, D = X_m^{\sigma \cup \{c\}} \setminus L\}$.

Замечание 7.5 *Пусть* $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, $L \leqslant \{\varphi \in \Gamma_0^\sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$, $D \leqslant \Gamma_0^\sigma \setminus L$, $\varphi_{\mathfrak{A},0} \leqslant ((\bigwedge_{\varphi \in L} \varphi) \ \wedge \ (\bigwedge_{\psi \in D} \neg\psi))$, *то* $\varphi_{\mathfrak{A},0}$ *удовлетворяет условию (*).*

Доказательство. Нужно доказать, что $\forall \mathfrak{B} \in K_\sigma \ : \ (\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{A} \iff \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A},0})$.

$\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B} \iff \exists f$ — частичный изоморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Рассмотрим $f_0 \subseteq f \ : \ dom f_0 \leqslant \{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in \sigma\} \iff f_0 : dom f_0 = \{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in \sigma\}$, $f_0(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ — частичный изоморфизм $\iff \forall \varphi \in \Gamma_0 \ (\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi) \iff \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A},0}$. □

$m \to m+1$ Пусть $\mathfrak{A} \in K_\sigma, c \notin \sigma$ $L \leqslant \{\varphi \in X_m^{\sigma \cup \{c\}} \mid \mathfrak{A} \models \exists x \ [\varphi]_x^c\}$, $D \leqslant X_m^{\sigma \cup \{c\}} \setminus L$.

$\varphi_{\mathfrak{A},m+1} \leqslant \{(\bigwedge_{\varphi \in L} \exists x \ [\varphi]_x^c) \ \wedge \ (\bigwedge_{\psi \in D} \neg \exists x \ [\psi]_x^c)\}$.

Покажем, что условие (*) выполняется, то есть $\forall \mathfrak{B} \in K_\sigma$ $(\mathfrak{B} \equiv_{m+1} \mathfrak{A} \iff \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A},m+1})$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\mathfrak{B} \in K_\sigma$, $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A},m+1}$. Покажем, что $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$. Пусть $a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}$.

По индукции $\langle \mathfrak{A}, a\rangle \models \varphi_{\langle \mathfrak{A},a\rangle,m} \Rightarrow \varphi_{\langle \mathfrak{A},a\rangle,m} \in L$, так как $\varphi_{\langle \mathfrak{A},a\rangle,m} \in X_m^{\sigma \cup \{c\}}$ $\Rightarrow \exists x \ [\varphi_{\langle \mathfrak{A},a\rangle,m}]_x^c \models \mathfrak{B} \Rightarrow \exists d \ : \ \langle \mathfrak{B}, d\rangle \models \varphi_{\langle \mathfrak{A},a\rangle,m}, c^{\mathfrak{B}} = d \Rightarrow$ по индукции $\langle \mathfrak{A}, a\rangle \equiv_m \langle \mathfrak{B}, d\rangle$.

$\langle \mathfrak{B}, b\rangle \models \varphi_{\langle \mathfrak{B},b\rangle,m} \Rightarrow \varphi_{\langle \mathfrak{B},b\rangle,m} \in L \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x \ [\varphi_{\langle \mathfrak{B},b\rangle,m}]_x^c \Rightarrow \exists c \in \mathfrak{A} \ : \langle \mathfrak{A}, c\rangle \models \varphi_{\langle \mathfrak{B},b\rangle,m} \Rightarrow \langle \mathfrak{A}, c\rangle \equiv_m \langle \mathfrak{B}, b\rangle \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$. Заметим, что $(\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A},m+1} \iff \forall \varphi \in X_{m+1}^{\sigma \cup \{c\}}$ выполняется $(\mathfrak{A} \models \exists x \ [\varphi]_x^c \iff \mathfrak{B} \models \exists x \ [\varphi]_x^c))$ — по предложению 7.3 (в обратную сторону).

$\mathfrak{A} \models \exists x \ [\varphi]_x^c \Rightarrow \exists a \in \mathfrak{A} \ : \ \langle \mathfrak{A}, a\rangle \models \varphi \Rightarrow \varphi \equiv \varphi_{\langle \mathfrak{A},a\rangle,m}$ — по построению $\Rightarrow$ так как $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$, то $\exists d \in \mathfrak{B} \ : \ \langle \mathfrak{A}, a\rangle \equiv_m \langle \mathfrak{B}, d\rangle \Rightarrow$ по индукции $\langle \mathfrak{B}, d\rangle \models \varphi_{\langle \mathfrak{A},a\rangle,m} \Rightarrow \langle \mathfrak{B}, d\rangle \models \varphi$.

$(\Leftarrow)$ Аналогично. □

Определение 7.6 *Формулы вида* $P(\bar{x}), (x = c), (x = y), (f(\bar{x} = y)$ *называются атомарными.*
Говорят, что φ *находится в приведенной нормальной форме, если* $\varphi = Q_1 \ x_1 \ldots Q_n \ x_n \ \psi(\bar{x}, \bar{y})$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, ψ *— бескванторная.*

Предложение 7.7 *Для каждой формулы* φ $\exists \psi \equiv \varphi$*:* ψ *— в приведенной нормальной форме.*

Доказательство. Алгоритм:

1 шаг С помощью тождеств: $P(\bar{t}) \equiv \exists \bar{x} \ (P(\bar{x}) \ \& \ \bigwedge_i (x_i = t_i))$, $f(\bar{t}) = g \equiv \exists \bar{x} \ (f(\bar{x}) = g \ \& \ \bigwedge_i (x_i = t_i))$, $t = c \equiv \exists x \ (t = x \ \& \ x = c)$ избавимся о неатомарных минимальных подформул.

2 шаг Приводим формулу к предворенной нормальной форме. $\square$

Обозначение. $lh\varphi \leqslant \min\{k \mid \varphi \equiv \psi, \psi$ — приведенная нормальная форма, ψ содержит k кванторов$\}$.

Предложение 7.8 $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \models \varphi$ *и* $lh\varphi \leq m$. *Тогда* $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Доказательство. Индукция по $lh\varphi$. Без ограниения общности будем считать, что φ — в приведенной нормальной форме.

шаг 0. $lh\varphi = 0$, то есть φ бескванторное предложение. $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \exists F_0 \neq \emptyset \Rightarrow \exists f \in F_0\ f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — частичный изоморфизм $\Rightarrow \{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in \sigma\} \subseteq domf$, $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$.

шаг от m к $m+1$. Пусть $lh\varphi \leq m+1$ и $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$.

а) $\varphi = \exists x\ \psi(x)$, ψ — приведенная нормальная форма. $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \exists a \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{A} \models \psi(a)$

$\langle \mathfrak{A}, a\rangle \models \psi(c)$, $c^{\mathfrak{A}} \leqslant a \Rightarrow \exists b \in \mathfrak{B}\ :\ \langle \mathfrak{A}, a\rangle \equiv_m \langle \mathfrak{B}, b\rangle \Rightarrow$ по индукции, так как $lh\psi \leq m$, $\langle \mathfrak{B}, b\rangle \models \psi(c)\ c^{\mathfrak{B}} = b \Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi(b) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists x\ \psi(x)$, то есть $\mathfrak{B} \models \varphi$.

б) $\varphi = \forall x\ \psi(x)$, ψ — приведенная нормальная форма с наименьшим квантором. $\mathfrak{B} \not\models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \neg\forall x\ \psi(x) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists x\ \neg\psi(x)\ lh\exists x\ \neg\psi(x) \leq m+1 \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\ \neg\psi(x) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\varphi$ — противоречие $\Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$. $\square$

Предложение 7.9 $\equiv_m$ — *отношение эквивалентности.*

Доказательство.

а) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{A}\ :\ F_0, \dots F_m\ :\ F_i \leqslant \{id_{\mathfrak{A}}\}$.

б) Пусть $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, $F_0, \dots F_m$ — соответствующие множества частичных изоморфизмов. $G_i \leqslant \{f_i^{-1} \mid f_i \in F - i\}$, $i = 0, \dots m$. $G_0, \dots G_m$ определяют, что $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{A}$.

в) Пусть $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{C}$. Тогда есть $F_0, \dots F_m$ и $G_0, \dots G_m$. Возьмем $H_i \leqslant \{f \circ g \mid f \in F_i, g \in G_i\}$, $i = 0, \dots m\ \{f \circ g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — частичные изоморфизмы$\}$ $H_0, \dots H_m$ определяют, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{C}$. $\square$

Теорема 7.10 (Тайманова-Фрайссе) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff \forall m\ \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$

Доказательство.
$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $\varphi_{\mathfrak{A},m}$. $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A},m} \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A},m} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.
$(\Leftarrow)$ Пусть $\forall m\ \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. Пусть $\varphi \in S(\sigma(\mathfrak{A}))$ и $m \leqslant lh\varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \Rightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi) \Rightarrow$ то есть $\forall\varphi\ (\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi) \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ $\square$

Предложение 7.11 *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in K_\sigma$. *Тогда* $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

Доказательство. $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2 \Rightarrow$ есть соответствующие $F_0, \ldots F_m$ и $G_0, \ldots G_m$. $H_i \leqslant \{f \times g \mid f \in F_i, g \in G_i\}$, $i = 0, \ldots m$. $(f \times g) : \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ $(f \times g)(a_1, a_2) \leqslant (f(a_1), g(a_1)) \Rightarrow \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$. □

Следствие 7.12 *Пусть* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in K_\sigma$, $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_2$. *Тогда* $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$ (по теореме Тайманова-Фрайссе) $\Rightarrow \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \Rightarrow$ по теореме Тайманова-Фрайссе $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$. □

8 Исчисление предикатов Гильбертовского типа

Определение 8.1 *Аксиомы ИП (Гильбертовского типа):*

1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$,
2. $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \xi)) \to (\varphi \to \xi)))$,
3. $((\varphi \mathbin{\&} \psi) \to \varphi)$,
4. $((\varphi \mathbin{\&} \psi) \to \psi)$,
5. $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \xi) \to (\varphi \to (\psi \mathbin{\&} \xi))))$,
6. $(\varphi \to (\varphi \lor \psi))$,
7. $(\varphi \to (\psi \lor \varphi))$,
8. $((\varphi \to \xi) \to ((\psi \to \xi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \xi)))$,
9. $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)))$,
10. $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$
11. $(\forall x \ \psi \to (\varphi)^x_y)$
12. $((\varphi)^x_t \to \exists x \ \varphi)$
13. $x = x$

14. $(x = y \to ((\varphi)^z_t \to (\varphi)^z_y)$

и правила вывода:

1. $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$

2. $\dfrac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x\ \psi},\ (x \notin FV(\varphi)$

3. $\dfrac{\psi \to \varphi}{\exists x\ \psi \to \varphi}$

Определение 8.2 *Доказательством формулы φ называется последовательность $\varphi_1 \dots \varphi_n$ такая, что $\varphi_n = \varphi$ и $\forall i \leq n$ φ_i либо является аксиомой, либо получено из $\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$ однократным применением одного правила вывода.*
φ — доказуем, если существует доказательство φ.
Выводом φ из Γ называется последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ такая, что $\varphi_n = \varphi$ и $\forall i \leq n$ либо φ_i является аксиомой, либо $\varphi_i \in \Gamma$, либо φ_i получена из $\varphi_1, \dots \varphi_{i-1}$ однократным применением одного из правил вывода.

Обозначение. Если существует вывод φ из Γ, то $\Gamma \rhd \varphi$.

Предложение 8.3 *Правило вывода является допустимым, если оно не увеличивает количетво доказуемых формул. Следующие правила вывода являются допустимыми:*

$$a)\ \frac{\varphi}{\forall x\ \varphi} \qquad б)\ \frac{(\varphi)^x_t}{\exists x\ \varphi}$$

$$в)\ \frac{(\varphi)^x_t \to \psi}{\forall x\ \varphi \to \psi} \quad г)\ \frac{\psi \to (\varphi)^x_t}{\psi \to \exists x\ \varphi}$$

Предложение 8.4 *Если формула φ доказуема в ИС, то φ доказуема в ИП.*

Теорема 8.5 (О дедукции) *Если $\Gamma \cup \{\varphi\} \rhd \psi$, то $\Gamma \rhd \varphi \to \psi$.*

Следствие 8.6 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \rhd \varphi$ *равносильно* $\rhd(\varphi_0 \to \dots (\varphi_n \to \varphi) \dots)$.

Теорема 8.7 *Если Γ — конечна, то*

а) $\Gamma \rhd \varphi \iff$ *секвенция $\gamma \vdash \varphi$ доказуема.*

б) $\rhd\varphi \iff\ \vdash \varphi$ *доказуема.*

9 Теорема Эрбрана

Определение 9.1 *Пусть $\varphi = \exists y\ \psi(\bar{x}, y)$. Тогда ей можно сопоставить $f_\varphi(\bar{x})$ скулемовская функция для φ.*

$\sigma^* \lesseqgtr \sigma \cup \{f_\varphi(\bar{x}) \mid \varphi = \exists y\ \psi(\bar{x}, y) \in F(\sigma)\}$

Рассмотрим $T_* \lesseqgtr \{\forall \bar{x}\ (\exists y\ \psi(\bar{x}, y) \to \psi(f_{\exists y\ \psi}(\bar{x}), \bar{x})) \mid \psi(\bar{x}, y) \in F(\sigma)\}$ *T сопоставляем* $T^* \lesseqgtr T \cup T_*$

σ^* — скулемовское обогащение σ,
T^* — скулемовское обогащение теории T,
$\mathfrak{A}^*$ — скулемовское обогащение модели $\mathfrak{A}$, если

1. $\mathfrak{A}^* \upharpoonright \sigma = \mathfrak{A}$,

2. $\mathfrak{A}^* \models T^*$ ($\mathfrak{A}^* \models (Th\mathfrak{A})^*$).

Предложение 9.2 *а) Любая модель $\mathfrak{A}$ имеет $\mathfrak{A}^*$.*

б) Если T — непротиворечива, то T^* — непротиворечива.

в) Если $\mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{B}^*$ — скулемовские обогащения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, и если $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{B}^*$, то $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Доказательство.

а) Пусть $\mathfrak{A}$ — модель, $\mathfrak{A} = \langle , \sigma \rangle$. Существует $\leq$ на A такое, что $\langle A, \leq \rangle$ — в.у.м., то есть $\langle \mathfrak{A}, \leq \langle$ — в.у.м. Для каждой $\varphi(\bar{x}) = \exists y\ \psi(\bar{x}, y) \in F(\sigma(\mathfrak{A}))$ и для каждого $\bar{a} \in \mathfrak{A}$
$f_\varphi(\bar{a}) \lesseqgtr \begin{array}{ll} \min\{c \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, c)\}, & \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}), \\ \text{минимальный элемент } A, & \mathfrak{A} \models \neg\varphi(\bar{a}). \end{array}$ Тогда положим $\mathfrak{A}^*$ — σ^* обогащение $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A}^* \models T_*$, то есть $\mathfrak{A}^*$ — скулемовское обогащение $\mathfrak{A}$.

б) Пусть T — непротиворечиво $\Rightarrow \exists \mathfrak{A} \models T$ по теореме о существовании модели $\Rightarrow \mathfrak{A}^* \models T^*$, так как $\mathfrak{A} \models T$ и $\mathfrak{A}^* \models T_* \Rightarrow T^*$ — непротиворечиво.

в) Пусть $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{B}^*$. Покажем, что $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Пусть $\bar{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models \exists y\ \psi(\bar{a}, y)$ $\Rightarrow \mathfrak{B}^* \models \psi(\bar{a}, f_{\exists y\ \psi}(\bar{a}))$. Так как $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{B}^*$, то $b = f_{\exists y\ \psi}(\bar{a}) \in \mathfrak{A}$, то есть $\exists b \in \mathfrak{A}\ :\ \mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, b) \Rightarrow$ по критерию элементарного вложения $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. $\square$

$X \subseteq \mathfrak{A}$
X^* — скулемовское замыкание X, если $X \subseteq X^*$, X^* содержит все константы из σ^* и X^* замкнут относительно функций изσ^*.
$\exists \mathfrak{B}^* \lesseqgtr \mathfrak{B}^*(X)\ :\ |\mathfrak{B}^*| = X^*$.
$\mathfrak{B} \lesseqgtr \mathfrak{B}X \lesseqgtr \mathfrak{B}^*(X) \upharpoonright \sigma$.

Предложение 9.3 *Пусть* $X \subseteq |\mathfrak{A}|$. *Тогда* $\mathfrak{B}(X) \preceq \mathfrak{A}$, $\|\mathfrak{B}\| = \max(\|X\|, \omega, \|\sigma\|) = \delta$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{B}^*(X) \subseteq \mathfrak{A}^* \Rightarrow \mathfrak{B}(X) \preceq \mathfrak{A}$.

$X^* \leqslant \bigcup X_n$, $X_0 \leqslant X$, $X_{n+1} \leqslant X \cup \{f(\bar{a}) \mid f \in \sigma^*, a \in X_n\}$. По индукции $\|X_n\| = \delta \Rightarrow \|X^*\| = \delta$. □

$\varphi = Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \ \psi(\bar{x}, \bar{y})$, ψ — бескванторная, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$.

$(\forall y_1 \ \varphi_1(\bar{x}, y))_H \leqslant (\varphi_1(\bar{x}, c))_H$, $c \notin \sigma(\varphi_1)$.

$(\exists y_1 \ldots \exists y_n \forall y_{n+1} \ \varphi_1(\bar{x}, \bar{y}, y_{n+1}))_H \leqslant (\exists y_1 \ldots y_n \ \varphi_1(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{y})))_H$, $f \notin \sigma(\varphi_1)$.

$\varphi_H = \exists y_1 \ldots \exists y_k \ \psi_H(\bar{x}, \bar{y})$ — получаем в результате, ψ_H — бескванторная, φ_H — эрбранова форма формулы φ.

Теорема 9.4 (Эрбрана) *Пусть* $\varphi_H = \exists \bar{y} \ \psi_H(\bar{x}, \bar{y})$. *Тогда* $\vdash \varphi \iff \exists \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n$ *— наборы термов такие, что доказуемы* $\psi_H(\bar{x}, \bar{t}_1) \ \vee \ldots \vee \ \psi_H(\bar{x}, \bar{t}_n)$.

Лемма 9.5 $\vdash \varphi \iff \vdash \varphi_H$.

Доказательство.
$(\Rightarrow)$ φ — доказуема $\Rightarrow$ φ тождественно истинна. Предположим, что φ_n не доказуема $\Rightarrow$ φ_H не тождественно истинна $\Rightarrow$ $\exists \mathfrak{A}'$ сигнатуры $\sigma(\varphi_H)$, $(\bar{a} \in \mathfrak{A}'$ $\mathfrak{A}' \models \neg\varphi_H(\bar{a})$, то есть $\mathfrak{A}' \models \forall y_1 \ldots \forall y_k \ \neg\exists\psi_H(\bar{a}, \bar{y}) \Rightarrow \forall y - 1 \ldots \forall y_{l_1} \ \exists y_{l_1+1}$ $= f_1(\bar{y})$

$\Rightarrow \mathfrak{A}' \models \neg\varphi$, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{A}' \restriction \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\varphi$ — противоречие с тождественной истинностью $\varphi \Rightarrow \varphi_H$ — доказуема.

$(\Leftarrow)$ φ_H — доказуема. Предположим, что φ не доказуема $\Rightarrow \varphi$ не тождественно истинна. $\varphi =$??????? $\Rightarrow \exists \mathfrak{A}, \bar{a}\mathfrak{A} \ : \ \mathfrak{A} \models \neg\varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists y_1 \ldots \exists y_{l_1} \ \exists y_{l_1+1} \ \ldots$ $\neg\psi(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \exists c_1 \ldots c_n \ : \ \mathfrak{A} \models \forall y_{l_1+1} \ldots \forall y_{l_2} \ \exists y_{l_2+1} \ldots \neg\psi(\bar{x}, \bar{c}, y_{l_1+1}, \ldots, y_n)$ $\Rightarrow \exists f_{l_2+1} \ \ldots \ f_{l_3} \ : \ |\mathfrak{A}|^{l_2 - l_1} \to |\mathfrak{A}|$

$\mathfrak{A} \models \forall y_{l_1+1} \ldots \forall y_{l_2} \ \forall y_{l_3+1} \ldots \forall y_{l_n} \ \exists y_{l_{n+1}} \ldots \neg\psi(\bar{x}, c_1, \ldots, c_l, y_{l+1}, \ldots, y_{l_2}, f_{l_2+1}(y_{l_1+1}, \ldots y_{l_2}) \ldots f_{l_3}(y_{l_1+1} \ldots y_{l_2}, y_{l_3+1} \ldots y_n))$

$\exists \bar{c}, f$ такие, что, если $\mathfrak{A}$ обогатить до $\mathfrak{A}'$ сигнатуры $\sigma(\varphi_H)$, то $\mathfrak{A}' \models \neg\varphi_H$ — противоречие $\Rightarrow$???????????????????? □

Предложение 9.6 *Пусть σ содержит хотя бы одну константу,* $\varphi(\bar{x}) = \exists \bar{y} \ \psi(\bar{x}, \bar{y})$, ψ *— бескванторная. Тогда* $\vdash \varphi(\bar{x}) \iff \exists \bar{t}_1, \ldots \bar{t}_n$ *— кортежи термов сигнатуры* σ *такие, что* $\vdash \varphi(\bar{x}, \bar{t}_1) \ \vee \ldots \vee \ \varphi(\bar{x}, \bar{t}_n)$ $\bar{t}_i = \bar{t}_i(\bar{x})$.

Доказательство.
$(\Rightarrow)$ Очевидно.
$(\Leftarrow)$

1-случай без равенства $\vdash \varphi(\bar{x})$, $\bar{x} = x_1, \ldots x_k$, $c_1, \ldots, c_k \notin \sigma \Rightarrow \vdash \varphi(\bar{c}) = \varphi(c_1, \ldots, c_k)$, $\sigma = \sigma(\varphi)$. $\sigma' \leqslant \sigma \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$. Тогда обязательно σ'

содержит хотя бы одну константу. Рассмотрим $c_1, \dots c_n, f_1(c_1) \dots f_n(c_1) \dots,$ $f_n(c_n)\ \dots\ f_1(f_1(c_1)) \dots .$ $\{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{t \in T(\sigma') \mid t$ — замкнут, то есть $FV(t) = \emptyset\}$ — эрбранов универсум сигнатуры σ'.

$P_1(\delta_1), P_2(\delta_1, \delta_2), P_1(\delta_2) \dots$ $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \varphi$ — атомарная, то есть φ не содержит логических связок$\}$.

Построим дерево:

Рис.

$\eta_{00} \leqslant \neg\xi_1$, $\eta_{01} \leqslant \xi_1$,
$\eta_{000} \leqslant \neg\xi_1\ \&\ \neg\xi_2$, $\eta_{001} \leqslant \neg\xi_1\ \&\ \xi_2$, $\eta_{010} \leqslant \xi_1\ \&\ \neg\xi_2$, $\eta_{011} \leqslant \xi_1\ \&\ \xi_2$.
$\eta_{\underbrace{\quad}_{n}0} \leqslant \eta_{\underbrace{\quad}_{n}}\ \&\ \neg\xi_n$, $\eta_{\underbrace{\quad}_{n}1} \leqslant \eta_{\underbrace{\quad}_{n}}\ \&\ \xi_n$.

$\exists\bar{y}\ \psi(\bar{c}, \bar{y}) = \exists\bar{y}\ \psi'(\bar{y})$ — тождественно истинна. ξ определяет $|\mathfrak{A}_\rho| \leqslant \{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\rho = 0101\dots.$

$\mathfrak{A}_\rho \models \eta_{\rho_i}\ \forall i\ \rho = \underbrace{\ \rho_i\ }_{i}\underbrace{\quad}$

$\mathfrak{A}_\rho \models \exists\bar{y}\ \psi'(\bar{y}) \Rightarrow \exists\delta_{i_1} \dots, \delta_{i_k}\ :\ \mathfrak{A}_\rho \models \psi(\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k})$ — бескванторная.

$m = \max\{l \mid \xi_l$ входит в $\psi(\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k})\} \Rightarrow \eta_{\rho_m} \models \psi(\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}) \Rightarrow \eta_{\rho_m} \vdash \exists\bar{y}\ \psi(\bar{y})$.

Для $S = \underbrace{01\dots1}_{S_1}0$ — хорошая, если $\eta_S \vdash \exists\bar{y}\ \psi'(\bar{y})$, $\eta_{S_1} \not\vdash \exists\bar{y}\ \psi'(\bar{y})$.

$H \leqslant \{S \in \{0,1\}^* \mid S$ — хорошая$\}$.

Пусть H — бесконечно. Ниже хороших вершин нет хороших вершин $\Rightarrow$ существует ветка не содержащая хороших вершин — противоречие $\Rightarrow$ H — конечно. $H = \{S_1, \dots S_l\} \Rightarrow S_i \to \bar{t}_i\ :\ \eta_{S_i} \vdash \psi'(\bar{t}_i)$.

Рассмотрим $\psi'(t_1)\ \vee\ \dots \vee\ \psi'(t_l)$. Берем модель $\mathfrak{A}'$ сигнатуры σ. $a_1, \dots, a_n\ :\ c_1^{\mathfrak{A}'}, \dots, c_n^{\mathfrak{A}'}\ \mathfrak{A}' \models \exists\bar{y}\ \psi(c_1^{\mathfrak{A}'}, \dots, c_n^{\mathfrak{A}'}) \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \exists\bar{y}\ \psi'(\bar{y})$.

$\{\delta_n^{\mathfrak{A}'} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{A}' \Rightarrow \rho \in \{0,1\}^\omega\ \mathfrak{A}_\rho \subseteq \mathfrak{A}'$.

$S_1, \dots, S_l$ — все хорошие вершины. $\psi(\bar{c}, t_1(\bar{c}))\ \vee \dots \vee\ \psi(\bar{c}, t_l(\bar{c}))$, $\bar{c} = c_1, \dots c_k$. $S_i \vdash \psi(\bar{c}, t_i(\bar{c}))$.

Покажем, что $\vdash \xi(\bar{a})$, то есть $\mathfrak{A}' \models \xi(\bar{c})$, $\{\delta_n^{\mathfrak{A}} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{A}$. На $\mathfrak{A}$ реализуется какая-то цепочка $\Rightarrow \exists S_i\ i \leq l$, S_i — хорошая. $\mathfrak{A} \models \eta_{S_i}$ $(S_i \in \{0,1\}^*)$.

$\eta_{S_i} \models \psi(\bar{c}, t_i(\bar{c})) \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \psi(\bar{c}, t_1(\bar{c}) \vee \dots \vee \psi(\bar{c}, t_l(\bar{c})) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \xi(\bar{a})\ \bar{c}^{\mathfrak{A}} = \bar{a})$ $\Rightarrow \xi$ — тождественно истинна $\Rightarrow\ \vdash \psi(\bar{x}, t_1(\bar{x}))\ \vee \dots \vee\ \psi(\bar{x}, t_l(\bar{x}))$.

2-случай с равенством.

Некоторые веточки просто реализоваться не могут. $\{\xi_i\}$ — формулы с равенством. $\square$

$\vdash \varphi(\bar{x}) \iff\ \vdash \varphi_H(\bar{x}) = \exists\bar{y}\ \psi_H(\bar{x}, \bar{y}) \iff\ \vdash \psi_H(\bar{x}, t_1(\bar{x}))\ \vee \dots \vee$ $\psi_H(\bar{x}, t_l(\bar{x})) \Rightarrow$ доказана теорема Эрбрана. $\square$

Теория алгоритмов

1 Понятие вычислимости

Определение 1.1 *1. Алгоритм записывается конечным текстом.*

2. Пошаговость алгоритма.

3. Определенность алгоритма (определен каждый шаг).

4. Массовость алгоритма (рассчитан на потенциально бесконечное множество начальных данных).

Определение 1.2 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \cup \{\textit{неопределено}\}$, $\rho f \leqslant \{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}$,
$\triangle f \leqslant \{\bar{x} \mid f(\bar{x}) \neq$ *неопределено,* $f(\bar{x}) \downarrow$
если $f(\bar{x}) =$ *неопределено* $f(\bar{x}) \uparrow$.
Функция называется вычислимой, если существует алгоритм ее вычисления, то есть такой алгоритм, что если мы на вход подаем $\langle x_1, \ldots\ x_n \rangle$, *то, если* $f(\bar{x}) \downarrow$, *то алгоритм останавливается, если же* $f(\bar{x}) \uparrow$, *то алгоритм не останавливается.*

Определение 1.3 $A \subseteq \mathbb{N}^n$, *A разрешимо, если существует алгоритм ответа на вопрос:* $\forall \bar{a} \in \mathbb{N}\ .\ \bar{a} \in A$?

Определение 1.4 *Множество A называется перечислимым, если существует алгоритм, который перечисляет все элементы A.*
$i \to a_i,\ \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} = A$.

2 Частично-рекурсивные функции

Определение 2.1 *Следующие функции называются простейшими:*
$O(x) = 0$, $S(x) = x + 1$, $I^n_m(x_1, \ldots x_n) = x_m$, $m \leq n$.

Определение 2.2 *а)* $g(x_1, \ldots, x_n)$, $h_1(x_1, \ldots, x_m)$, $\ldots\ h_n(x_1, \ldots, x_m)$.
$f(x_1, \ldots, x_m) = g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_n(\bar{x}))$. *Говорят, что f получено из g и $h_1, \ldots h_n$ при помощи оператора суперпозиции.*

б) $g(x_1, \ldots, x_n)$, $h(x_1, \ldots, x_m, y, z)$, $f(x_1, \ldots x_m, 0) = g(x_1, \ldots x_n)$, $f(x_1, \ldots\ x_m, y + 1) = h(x_1, \ldots x_m, y, f(x_1, \ldots x_m, y))$. *$f$ получена из g и h при помощи оператора примитивной рекурсии.*

в) $g(x_1, \ldots x_n, y)$,

$$f(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} y, & \text{если} g(x_1, \ldots x_n, y) = 0 \text{и} \\ & \forall z < y \ g(x_1, \ldots x_n, z) \downarrow \text{и} \\ & g(x_1, \ldots x_n, z) \neq 0 \\ \text{неопределено}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$f(\bar{x}) \leqslant \mu y[g(\bar{x}, y) = 0]$. *$f$ получена из g при помощи операции минимизации.*

Определение 2.3 *Примитивно-рекурсивные функции:*

1. *простейшие — п.р.ф.,*
2. *$g, h_1, \ldots h_n, h$ — п.р.ф., f получена из них с помощью оператора суперпозиции, примитивной рекурсии, то f — п.р.ф.,*
3. *других п.р.ф. нет.*

Предложение 2.4 *Каждая п.р.ф. всюду определена.*

Доказательство. Индукция по построению.

1. Простейшие — всюду определены.
2. Если функция получена из всюду определенных с помощью операторов рекурсии или суперпозиции (однократного применения), то функция всюду определена.

Предложение 2.5 *Следующие функции п.р.ф.:*

1. $f(x) = n$
2. $f(x) = x + n$
3. $f(x, y) = x + y$
4. $f(x, y) = x \cdot y$
5. $f(x, y) = x^y$
6. $sg(x) \leqslant \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
7. $x \dot{-} y \leqslant \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$

8. $f(x,y) = |x-y|$

9. $f(x,y) = \max(x,y)$

10. $f(x,y) = \min(x,y)$

11. $f(x_1, \dots x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \dots x_n, i$

12. $f(x_1, \dots x_{n+2}) \leqslant \begin{cases} \sum_{i=x_{n+1}}^{x_{n+2}} g(x_1, \dots x_n, i), & x_{n+1} \leq x_{n+2} \\ \hfill 0, & x_{n+1} > x_{n+2} \end{cases}$

13. $f(x_1, \dots x_{n+1}) = \prod_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \dots x_n, i)$

14. $f(x_1, \dots x_{n+2}) \leqslant \begin{cases} \prod_{i=x_{n+1}}^{x_{n+2}} g(x_1, \dots x_n, i), & x_{n+1} \leq x_{n+2} \\ \hfill 1, & x_{n+1} > x_{n+2}, \end{cases}$

    где g — п.р.ф.

15. $[\frac{x}{y}]$, $[\frac{x}{0}] \leqslant x$

16. $rest(x,y)$ *— остаток от деления x на y;* $rest(x,0) \leqslant x$

17. $\tau(x)$ *— число делителей числа x;* $\tau(0) \leqslant 0$

18. $\sigma(x)$ *— сумма делителей числа x;* $\sigma(0) \leqslant 0$

19. $lh(x)$ *— число простых делителей числа x;* $lh(0) \leqslant 0$

20. $\pi(x)$ *— число простых чисел* $\leq x$

21. $k(x,y) = НОК(x,y)$; $k(x,0) = k(0,y) = 0$

22. $D(x,y) = НОД(x,y)$; $D(0,0) = 0$

23. $long(x)$ *— номер наибольшего простого делителя числа x.*

24. $p(x)$ *— x-тое простое число*

    $$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \end{array}$$

25. $ex(x,y)$ *— показатель x-того простого числа в каноническом разложении y:* $y = \dots p(x)^{ex(x,y)} \dots$

26. $[\sqrt{x}]$ *— целая часть*

27. $[\sqrt[n]{x}]$ *— целая часть,* $\sqrt[0]{x} = x$

28. $[x\sqrt{z}]$

29. $[e \cdot x]$

30. $[e^x]$

Определение 2.6 $g(x_1, \ldots x_n, y)$, $h(x_1, \ldots, x_n)$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} y, & h(\bar{x})\downarrow, y \le h(\bar{x}), g(x_1, \ldots x_n, y) = 0 \\ & \text{и } \forall z < y \ g(x_1, \ldots x_n, y)\downarrow \ \text{ и} \\ & g(x_1, \ldots x_n, z) \ne 0 \\ h(x_1, \ldots x_n) + 1, & \text{если } h(\bar{x})\downarrow, \\ & \forall z \le h(\bar{x}) \ g(\bar{x}, y) \text{ определена и} \\ & g(\bar{x}, z) \ne 0 \end{cases}$$

f получена из g и h применением ограниченного оператора минимизации: $f(x_1, \ldots x_n) = (\mu y \le h(\bar{x}))[g(\bar{x}, y) = 0]$

Предложение 2.7 *Пусть g, h — п.р.ф и $f(\bar{x}) = (\mu y \le h(\bar{x}))[g(\bar{x}, y) = 0]$. Тогда f — п.р.ф.*

Доказательство. $f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{h(\bar{x})} sg(\prod_{j=0}^{i} g(\bar{x}, i))$ — суперпозиция $\Rightarrow f$ — п.р.ф. □

Предложение 2.8 *Пусть $h_1(\bar{x}), \ldots h_n(\bar{x})$, $g_1(\bar{x}), \ldots g_n(\bar{x})$ — п.р.ф. и $\forall \bar{x}$ $\exists! i \le n \ : \ h_i(\bar{x}) = 0$ и пусть* $f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}), & h_1(\bar{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_n(\bar{x}), & h_n(\bar{x}) = 0 \end{cases}$

Тогда $f(\bar{x})$ — п.р.ф.

Доказательство. $f(\bar{x}) = g_1(\bar{x}) \cdot \overline{sg}(h_1(\bar{x})) + \ldots + g_n(\bar{x}) \cdot \overline{sg}(h_n(\bar{x})) \Rightarrow f$ — п.р.ф. □

Определение 2.9 $g_1(\bar{x}, y), \ldots g_n(\bar{x}, y), g(\bar{x})$, $h(\bar{x}, y, z_1, \ldots z_n)$ *и* $\forall i \le n \ \forall \bar{x} \ \forall y \ g_i(\bar{x}, y) \le y$

$f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$,

$f(\bar{x}, y+1) = h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, g_1(\bar{x}, y)) \ldots f(\bar{x}, g_n(\bar{x}, y)))$, *$f$ получена возвратной рекурсией.*

Предложение 2.10 *g_i, g, h — п.р.ф., f получена применением операции возвратной рекурсии. Тогда f — п.р.ф.*

Доказательство. $F(\bar{x}, y) \leqslant \prod_{i=0}^{y} p(i)^{f(\bar{x}, i)}$, $F(\bar{x}, 0) = 2^{g(\bar{x})}$, $F(\bar{x}, y+1) = F(\bar{x}, y) \cdot p(y+1)^{h(\bar{x}, y, ex(g(\bar{x}, y)))} \cdot F(\bar{x}, y) \ldots, ex(g_n(\bar{x}, y), F(\bar{x}, y)) \Rightarrow F(\bar{x}, y)$ — п.р.ф.

$f(\bar{x}, y) = ex(y, F(\bar{x}, y)) \Rightarrow f$ — п.р.ф. □

Определение 2.11 *Канторовская нумерация* $C(x,y)$

$$\begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \end{array}$$

$C : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ — *взаимно-однозначна.* $\exists l(n), r(n) : C(l(n), r(n)) = 0$, $l(c(x,y)) = x$, $r(c(x,y)) = y$.

Рис.

Предложение 2.12 *а)* $c(x,y) = [\frac{(x+y)^2 + \xi x + y}{2}]$

$$ln(n) =\dot{-} [\frac{[\frac{\sqrt{\gamma_{n+1}}+1}{2}][\frac{\sqrt{\gamma_{n+1}} \dot{-} 1}{2}]}{2}]$$

$$r(n) = [\frac{\sqrt{\gamma_{n+1}}+1}{2}] \dot{-} (l(n)+1)$$

б) c, l, r — *п.р.ф.*

Определение 2.13 c_n, c_k^n, $k \le n$. $c_2(x,y) \leqslant c(x,y)$, $c_1^2(n) \leqslant l(n)$, $c_2^2(n) \leqslant r(n)$. *По индукции:* $c_{n+1}(x_1, \dots x_{n+1}) \leqslant c(c_n(x_1, \dots x_n), x_{n+1})$, $c_k^{n+1}(m) \leqslant c_k^n(l(m))$, $k \le n$, $c_{n+1}^{n+1}(m) \leqslant r(m)$.

Следствие 2.14 *а)* c_n, c_k^n — *п.р.ф.,*

б) $c_k^n(c_n(x_1, \dots, x_n)) = x_k$, $k \le n$, $c_n(c_1^n(m), \dots c_n^n(m)) = m$,

в) $c_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ — *взаимно-однозначно.*

Определение 2.15 *Частично-рекурсивные функции:*

1. *простейшие функции — ч.р.ф.,*
2. *если функция получена из ч.р.ф. однократным применением оператора суперпозиции, примитивной рекурсии или минимизации, то эта функция — ч.р.ф.,*
3. *других ч.р.ф. нет.*

Ч.р.ф. называется общерекурсивной, если она всюду определена.

Предложение 2.16 *а)* *ПРФ* $\subset$ *ОРФ* $\subset$ *ЧРФ*

б) *ОРФ* $\neq$ *ЧРФ*

в) ПРФ $\neq$ ОРФ

Доказательство.

а) Очевидно из определения.

б) $\omega(x) \leqslant \mu y(s(x)+y=0)$, $\delta\omega = \rho\omega = \emptyset \Rightarrow \omega \in$ ЧРФ, $\omega \notin$ ОРФ.

в) Функция Аккермана: $f(x,y,0)=x+y$, $f(x,y,1)=x\cdot y$, $f(x,y,2)=x^y$, $f(x,y,3)=x^{\overbrace{x\ldots x}^{y}}$. $\square$

3 Машина Тьюринга

$A=\{0,1\}$ — внешний алфавит ($A=\{a_1,\ldots a_n\}$),
$Q=\{q_1,\ldots q_n\}$ — внутренний алфавит или набор состояний,
$\alpha,\beta \in \{0,1\}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}^n$, $j\in\{0,1\}$,
$\alpha q_i j\beta$ — машинное слово,
$k_{ij}\ q_i j \to q_s t$ — команда, $\Pi=\{k_{ij}\}$ — некоторое множество команд,
$S=\alpha q_i j \beta$, Π — программа (машина),
$S \overset{\Pi}{\to} S_1$, если S_1 получается из S за 1-м шагом машины Π (применением 1-ой команды).
$S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$, если существует конечная последовательность: $S \overset{\Pi}{\to} S_1 \overset{\Pi}{\to} S_2 \ldots \overset{\Pi}{\to} S_n = S'$ (в частности $S=S'$).
$S \overset{\Pi}{\Rrightarrow} S'$, если $S \overset{\Pi}{\Rightarrow} S'$ и не используются ячейки слева.
$S \overset{\Pi}{|\!\Rrightarrow} S'$, если $S \overset{\Pi}{\Rrightarrow} S'$ и не используются ячейки справа.

Машина начинает работать в состоянии q_1, а останавливается в q_0. $\underline{n} \leqslant \underbrace{1\ldots1}_{n+1} \leqslant 1^{n+1}$ — код числа n. $(x_1,\ldots,x_n) \leqslant 0\underline{x_1}0\underline{x_2}0\ldots0\underline{x_n}0 \leqslant 01^{x_1+1}01^{x_2+1}\ldots01^{x_n+1}0 \leqslant 0\underbrace{1\ldots1}_{x_1+1}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{x_n+1}0$.

$$q_1 0\underline{x_1}0\ldots0\underline{x_n}0 \overset{\Pi}{\Rightarrow} q_0 0\underline{f(x_1,\ldots x_n)}0 \qquad (*)$$

Ч.р.ф. называется вычислимой на машине Π, если, начиная работу с $q_1 0\underline{x_1}0\ldots0\underline{x_n}0$, приходит к $q_0 0\underline{f(x_1,\ldots x_n)}0$ в том случае, когда $f(\bar{x})$ определена и не останавливается, если $f(\bar{x})$ не определена.

Функция называется правильно вычислимой на машине Тьюринга, если выполняется (*) только с $\overset{\Pi}{\Rrightarrow}$.

Композиция машин Тьюринга П называется композицией МТ: $\Pi = \Pi_1 \circ \Pi_2$, если $S \overset{\Pi_1}{\Rrightarrow} \alpha q_0 j\beta$, $\alpha q_1 j \beta \overset{\Pi_2}{\Rrightarrow} S'$, $S \overset{\Pi}{\Rrightarrow} S'$, $\Pi_1 \ : \ Q_1 = \{q_0, \dots q_n\}$, $\Pi_2 \ : \ Q_2 = \{q_0, \dots\}$, $\Pi_1 \circ \Pi_2 = [\Pi_1]^{q_0}_{q_{n+1}} \cup [\Pi_2]^{q_i}_{q_{i+n}}$, $i > 0$.

Условный оператор: Π_1, Π_2, Π_3 — МТ. $\Pi = \Pi_1 E \begin{bmatrix}\Pi_2 \\ \Pi_3\end{bmatrix}$

если $S \overset{\Pi_1}{\Rrightarrow} \alpha q_0 010\beta$ $\alpha q_1 010 \beta \overset{\Pi_2}{\Rrightarrow} S'$, либо $S \overset{\Pi_1}{\Rrightarrow} \alpha q_0 \gamma$, $\gamma \neq 010\beta$, $\alpha q_1 \gamma \overset{\Pi_2}{\Rrightarrow} S'$, то $S \overset{\Pi}{\Rrightarrow} S'$.

$\Pi_1 \ : \ Q_1 = \{q_0, \dots q_n\}$, $\Pi_2 \ : \ Q_2 = \{q_0, \dots q_n\}$, $\Pi_3 \ : \ Q_3 = \{q_0, \dots q_n\}$, $\Pi_4 = \{\ q_1 1 \to q_{n+1} 1;\ q_1 0 \to q_2 0R;\ q_2 0 \to q_{n+1} 0L;\ q_2 1 \to q_3 1R;\ q_3 1 \to q_n 1L;\ q_4 1 \to q_{n+1} 1L;\ q_3 0 \to q_5 0L;\ q_5 1 \to qn + m + 11L\}$,

$\Pi = [\Pi_1]^{q_0}_{q_{n+m+k+1}} \cup [\Pi_2]^{q_i, i\neq 0}_{q_{i \neq n}} \cup [\Pi_3]^{q_i, i \neq 0}_{q_{i+m+n}} \cup [\Pi_4]^{q_i, i \leq 5}_{q_{i+m+n+k}}$.

Условный оператор с циклом: Π_1, Π_2, Π_3 — МТ. $\Pi = \dot{\Pi}_1 E \begin{bmatrix}\Pi_2 \\ \dot{\Pi}_3\end{bmatrix}$

Базовые МТ:

Перенос 0: (А) $q_1 001^x 0 \Rrightarrow q_0 01^x 00$

Правый сдвиг: (Б+) $q_1 01^x 0 \Rrightarrow 01^x q_0 0$

Левый сдвиг: (Б-) $01^x q_1 0 \Rrightarrow q_0 01^x 0$

Транспозиция: (В) $01^x q_1 01^y 0 \Rrightarrow 01^y q_0 01^x 0$

Копирование: (К) $q_1 01^x 0^{x+2} \Rrightarrow q_0 01^x 01^x 0$

Вычитание единицы: (R) $q_1 01^{x+1} 0 \Rrightarrow q_0 01^x 00$, $q_1 00 \Rrightarrow q_0 00$

Копирование:
(К_n) $q_1 01^{x_1} 0 \dots 01^{x_n} 0^{n+2+x_1+\dots+x_n} \Rrightarrow q_0 01^{x_1} 0 \dots 01^{x_n} 01^{x_1}\ 0 \dots\ 01^{x_n} 0$

Циклическая перестановка:
(Ц_n) $q_1 01^{x_1} 0 \dots 01^{x_n} 0 \Rrightarrow q_0 01^{x_2} 0 \dots 01^{x_n} 01^{x_1} 0$

Ликвидация: (Л) $q_1 01^x 0 \Rrightarrow q_0 0^{x+2}$

Прибавление единицы: (S) $q_1 01^x 00 \Rrightarrow q_0 01^{x+1} 0$

Предложение 3.1 *Следующие функции правильно вычислимы на машине Тьюринга:*

а) $0(x)$

б) $S(x)$

в) $I^n_m(x)$

г) $x+y$

д) $x \dot{-} 1$

е) $x \dot{-} y$

ж) $x \cdot y$

Предложение 3.2 *Если $f, g_1, \ldots g_n$ правильно вычислимы, то $f(g_1(\bar{x}),$ $\ldots$ $g_n(\bar{x}))$ правильно вычислима.*

Доказательство. $\exists F, G_1, \ldots G_n$ $f, g_1, \ldots g_n$

$q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_m+1} 0 \overset{K_m}{\Rrightarrow} q_{i_1} 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_m+1} 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_m+1} 0$

$\overset{(\text{Б}^+)^m G_1 (\text{Б}^-)^m}{\Rrightarrow} q_{i_2} 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_m+1} 0 1^{g_1(\bar{x})+1} 0 \ldots 0$

$\overset{(\text{Ц}_{m+1})^m}{\Rrightarrow} q_{i_s} 0 1^{g_1(\bar{x})+1} 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_m+1} 0$

$\overset{\text{Б}^+ K_m}{\Rrightarrow} \ldots \overset{G_{n-1}}{\Rrightarrow} \ldots 0 1^{g_1(\bar{x})+1} 0 \ldots 0 1^{g_{n-1}(\bar{x})+1} 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_m+1} q_{i_l} 0 \cdot 1^{g_{n-1}(\bar{x})+1} 0 \ldots 0$

$\overset{(\text{Б}^-)^m (\text{Ц}_{m+1})^m (\text{Б}^+)}{\Rrightarrow} 0 1^{g_1(\bar{x})+1} 0 \ldots 0 1^{g_{n-1}(\bar{x})+1} \cdot q_{i_l+1} 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_m+1} 0 \cdot 0$

$\overset{G_n (\text{Б}^-)^{n-1}}{\Rrightarrow} q_{i_l+2} 0 1^{g_1(\bar{x})+1} 0 \ldots 0 1^{g_n(\bar{x})+1} 0 \ldots 0 \overset{F}{\Rrightarrow} q_0 0 1^{f(g_1(\bar{x}), \ldots g_n(\bar{x}))+1} 0$

$K_m (\text{Б}^+)^m G_1 (\text{Б}^-)^m (\text{Ц}_{m+1})^m \text{Б}^+ K_m \ldots G_{n-1} (\text{Б}^-)^m (\text{Ц}_{m+1})^m G_n (\text{Б}^-)^{n-1} F.$ $\square$

Предложение 3.3 *Если f получена из g и h однократным применением оператора рекурсии и g и h правильно вычислимы, то f правильно вычислима.*

Доказательство. на семинаре.

Предложение 3.4 *$f(\bar{x}) = \mu y (g(\bar{x}, y) = 0)$, g правильно вычислима $\Rightarrow f$ правильно вычислима.*

Доказательство. на семинаре.

Предложение 3.5 *Любая ЧРФ является правильно вычислимой на МТ.*

4 Кодировка машин Тьюринга

$\forall n = p_0^{k_0} \ldots p_m^{k_m}$, $m \leq n$, $k_i \leq n$.

Определение 4.1 $\gamma(a_1, \dots a_n) = 2 \cdot p_1^{a_1+1} \dots p_n^{a_n+1}$,

$A \subseteq \mathbb{N}^k$ $\chi_A(x_1, \dots x_k) \leqslant \begin{cases} 1, & (x_1, \dots x_n) \in A, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

A — примитивно рекурсивное (рекурсивное) множество, если χ_A — п.р.ф.

Предложение 4.2 $\{\gamma(S) \mid S \in \{0,1\}^*\}$ *— п.р.м.* $(\{0,1\}^* \leqslant \bigcup_n \{0,1\}^n)$

Доказательство. на семинаре.

Предложение 4.3 *Следующие функции — п.р.ф.:*

1. $L(n,a) \leqslant \begin{cases} \gamma(a\alpha), & \textit{если } \alpha \in \{0,1\}^*, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

2. $R(n,a) \leqslant \begin{cases} \gamma(\alpha a), & \textit{если } \gamma(\alpha) = n, a \in \{0,1\}, \alpha \in \{0,1\}^* \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

3. $L(n) \leqslant \begin{cases} 2, & \textit{если } n = 2 = \gamma(\emptyset), \\ \gamma(\alpha), & \textit{если } n = \gamma(a\alpha), a\alpha \in \{0,1\}^* \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

4. $R(n) \leqslant \begin{cases} 2, & \textit{если } n = 2 = \gamma(\emptyset), \\ \gamma(\alpha), & \textit{если } n = \gamma(\alpha a), \alpha a \in \{0,1\}^* \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

5. $x \circ y \leqslant \begin{cases} \gamma(\alpha, \beta), & \textit{если } x = \gamma(\alpha), y = \gamma(\beta), \alpha, \beta \in \{0,1\}^* \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

6. $H(x) \leqslant \begin{cases} a+1, & \textit{если } x = \gamma(a\alpha), \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

7. $K(x) \leqslant \begin{cases} a+1, & \textit{если } x = \gamma(\alpha a), \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Определение 4.4 *Машинное слово:* $\gamma(\alpha q_i j \beta) \leqslant 2^2 \cdot 3^i \cdot 5^j \cdot 7^{\gamma(\alpha)} \cdot 11^{\gamma(\beta)}$.

Предложение 4.5 $\{\gamma(S) \mid S$ *— машинное слово*$\}$ *— п.р.м.*

Определение 4.6 $K_{ij} \ : \ q_i j \to q_s l_\triangle$, $\triangle \in \{\emptyset, R, L\}$

$\gamma(K_{ij}) \leqslant P_{c(i,j)}^{2^5 \cdot 3^l \cdot 5^\delta}$, $\delta = \begin{cases} 0, & \triangle = \emptyset, \\ 1, & \triangle = R, \\ 2, & \triangle = L \end{cases}$

$\gamma(\Pi) \leqslant 2^3 3^n \prod_{i \le n, j \le 1} \gamma(K_{ij})$, $i, j \ : \ K_{ij} \in \Pi$, $n = \max\{i \mid q_i$ *вход в* $\Pi\}$.

Определение 4.7

$$t(x,y) \leqslant \begin{cases} \gamma(\alpha' q_l a \beta'), & \textit{если } x = \gamma(\Pi), y = \gamma(\alpha q_i j \beta), \\ & \alpha q_i j \beta \overset{1 \text{ шаг } \Pi}{\Longrightarrow} \alpha' q_l a \beta', \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

$$T(x,y,z,t) \leqslant \begin{cases} 1, & \textit{если } x = \gamma(\Pi), y = \gamma(\alpha q_i j \beta), \\ & \alpha q_i j \beta \overset{\leq t \text{ шагов } \Pi}{\Longrightarrow} q_0 0 1^{z+1} beta', \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

$$T(a, x_1, \dots x_n, z, t) \leqslant \begin{cases} 1, & \textit{если } a = \gamma(\Pi), \\ & q_1 0 \underline{x_1} 0 \dots 0 \underline{x_1} 0 \overset{\leq t \text{ шагов } \Pi}{\Longrightarrow} \alpha' q_0 0 \underline{z} 0 \beta', \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Предложение 4.8 *t, T, T^n — п.р.ф.*

Доказательство. на семинаре.

Теорема 4.9 (о нормальной форме Клини) *Если f вычислима на МТ, то существует п.р.ф. g : $f(\bar{x}) = l(\mu y(g(\bar{x}, y) = 0))$.*

Доказательство. Пусть f вычислима на МТ с программой П, $a = \gamma(\Pi)$. Рассмотрим $g(\bar{x}, y) = |T^n(a, x_1, \dots, x_n, l(y), r(y)) - 1|$. Покажем, что $f(\bar{x}) = l(\mu y(g(\bar{x}, y) = 0))$.

1. f неопределена $\Rightarrow$ П не остановится $\Rightarrow T_n = 0 \Rightarrow$ имеем равенство.

2. f определена $\Rightarrow \exists t$: $q_1 0 \underline{x_1} 0 \dots 0 \underline{x_1} 0 \overset{\Pi}{\Rightarrow} \alpha' q_0 0 \underline{f(\bar{x})} 0 \beta'$. Тогда $z = f(\bar{x})$ $\Rightarrow f(\bar{x}) = l(\mu y(g(\bar{x}, y) = 0))$. □

Следствие 4.10 *f — ЧРФ $\Rightarrow \exists$ п.р.ф. g : $f(\bar{x}) = l(\mu y(g(\bar{x}, y) = 0))$.*

Доказательство. f — ч.р.ф $\Rightarrow f$ — п.р.ф. $\Rightarrow \exists g$. □

Следствие 4.11 *Если f — о.р.ф, то f может быть получена.*

Теорема 4.12 (Основная теорема о вычислимых функциях) *ЧРФ = ВТ = ПВТ*

Доказательство. ЧРФ$\subseteq$ ПВТ $\subseteq$ ВТ $\subseteq$ ЧРФ. □

Следствие 4.13 *ОРФ = всюду определенные ПРТ = всюду определенные ВТ.*

Тезис Черча. Любая интуитивно вычислимая функция является ч.р.ф.

5 Универсальные функции

Определение 5.1 *K — множество n-местных функций. $f(x_0, \dots, x_n)$ — универсальная функция для класса K, если выполняются:*

а) $\forall a \in \mathbb{N}\ f(a, \bar{x}) \in K$,

б) $\forall g \in K\ \exists a \in \mathbb{N}\ :\ g(\bar{x}) = f(a, \bar{x})$, то есть $K = \{f(a, \bar{x}) \mid a \in \mathbb{N}\}$.

Замечание 5.2 *K имеет универсальную функцию $\iff$ K — счетен.*

Доказательство. $K = \{g_1(\bar{x}), \dots g_n(\bar{x}) \dots\}$, $f(n, \bar{x}) \leqslant g_n(\bar{x})$. □

Следствие 5.3 *ПРФ, СРФ и ЧРФ имеют универсальные функции.*

Замечание 5.4 *Если $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно-однозначна, f — универсальная для K, то $g(x_0, \bar{x}) \leqslant f(h(x_0), \bar{x})$ — универсальная для K.*

Следствие 5.5 *а) Если K имеет универсальную функцию, то он имеет континуум универсальных функций.*

б) ПРФ, ОРФ, ЧРФ имеют континуум универсальных функций.

Предложение 5.6 *а) $\nexists$ п.р.ф — универсальной для класса ПРФ$_n$.*

б) $\nexists$ о.р.ф. — универсальной для ОРФ$_n$.

Доказательство. (от противного)

а) Пусть $f(x_0, \bar{x})$ — универсальная для ПРФ$_n$, f — п.р.ф. Тогда $g(\bar{x}) \leqslant f(x_1, x_1, x2, \dots x_n) + 1 \Rightarrow g$ — п.р.ф. $\Rightarrow \exists a\ :\ f(a, \bar{x}) = g(\bar{x}) \Rightarrow f(a, \dots a) = g(a, \dots a) = f(a, \dots a) + 1$ — противоречие.

б) Аналогично.

Следствие 5.7 *$\nexists$ ч.р.ф. — универсальной для ОРФ.*

Доказательство. f — ч.р.ф. для ОРФ $\Rightarrow \forall a\ f(a, \bar{x})$ — о.р.ф. $\Rightarrow \forall a, a_1, \dots a_n\ f(a, \bar{a})$ — о.р.ф. — противоречие. □

Теорема 5.8 *Для ЧРФ$_n$ $\exists f$ — ч.р.ф., универсальная.*

Доказательство. Пусть K — ЧРФ$_n$. $f(x_0, x_1, \dots x_n) \leqslant l(\mu y(|T^n(x_0, \dots x_n, l(y), r(y)) - 1| = 0)$.

а) $\forall a \in \mathbb{N}\ f(a, \bar{x})$ — ч.р.ф. (n-местная).

б) Пусть h — ч.р.ф $\Rightarrow h$ — правильно вычислима на МТ $\Rightarrow \exists H$ — МТ, вычисляющая h. Пусть $a \leqslant \gamma(H) \Rightarrow h(\bar{x}) = f(a, \bar{x})$. □

Определение 5.9 $\varphi^2(x_0, x_1) \leqslant l(\mu y[T'(x_0, x_1, l(y), r(y)) - 1) = 0]$, $\varphi^{n+1}(\bar{x}) \leqslant \varphi^2(x_0, c^n(x_1, \dots x_n))$.

Клинивские скобки:

$$[x, y] \leqslant c(l(x), c(r(x), y)),$$

$$[x_1, \dots x_n] \leqslant [[x_1, \dots x_{n-1}], x_n],\ n > 2,$$

$$[k]_{21} \leqslant c(l(k), l(r(k))),$$

$$[k]_{22} \leqslant r(r(k)),$$

$$[k]_{n1} \leqslant [[k]_{21}]_{n-1,1},$$

$$\dots$$

$$[k]_{n,n-1} \leqslant [[k]_{21}]_{n-1,n-1},$$

$$[k]_{nn} \leqslant [k]_{22}.$$

Предложение 5.10 *Для любых* $n, l, k \in \mathbb{N}, l \le n$

а) $[[x_1, \dots x_n]]_{nl} = x_l$

б) $[[k]_{n1}, \dots [k]_{nn}] = k$

в) $[]$ — *взаимно-однозначное отображение* $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.

Предложение 5.11 *а)* $[c(x_0, x_1), x_2] = c(x_0, c(x_1, x_2))$,

б) $c^n(c(x_0, x_1), x_2, \dots x_n) = c^{n+1}(x_0, \dots x_n)$,

в) $[x_1, \dots x_n] = [[x_1, \dots x_m], x_{m+1}, \dots , x_n]$

Предложение 5.12 φ^{n+1} — *ч.р.ф., универсальная для ЧРФ*$_n$.

Доказательство. φ^2 — универсальная для $n > 1$. φ^{n+1} — универсальная для ЧРФ$_n$. φ^{n+1} — ч.р.ф. $\Rightarrow \varphi^{n+1}(a, x_1, \dots x_n)$ — ч.р.ф. $\in$ ЧРФ$_n$. Пусть $f(x_1, \dots x_n)$ — ч.р.ф. Рассмотрим $g(x) \leqslant f(c_{n1}(x), \dots c_{nn}(x))$ — ч.р.ф. $\Rightarrow$ $\exists a \in \mathbb{N} : g(x) = \varphi^2(a, x) \Rightarrow f(x_1, \dots x_n) = g(c^n(x_1, \dots x_n)) = \varphi^2(a, c^n(x_1, \dots x_n)) = \varphi^{n+1}(a, x_1, \dots x_n)$ □

Определение 5.13 *Клинивская универсальная функция:* $K^2(x_0, x_1) \leqslant \varphi^2(l(x_0), c(r(x_0), x_1))$, $K^{n+1} \leqslant K^n([x_0, x_1], x_2, \dots x_n)$.

Предложение 5.14 $K^{n+1}(x_0,\dots x_n)=K^n([x_0,x_1],x_2,\dots x_n)=$
$K^{n-1}([[x_0,x_1],x_2],x_3,\dots x_n)=\dots=K^2([\dots[x_0,\dots x_{n-1}],x_n)=$
$K^2([x_0,\dots x_{n-1}],x_n)$.

Предложение 5.15 $K^n(c(x_0,x_1),x_2,\dots x_n)\varphi^{n+1}(x_0,\dots x_n)$.

Доказательство. Заметим, что $l([a_0,\dots a_n])=l([a_0,\dots a_{n-1}],a_n)=l([a_0,$ $\dots\ a_{n-1}])=\dots=l(a_0)$.

$r([a_0,\dots a_n])=r([a-0,\dots a_{n-1}],a_n])=c(r([a_0,\dots a_{n-1}],a_n)=\dots=$ $c(c(\dots c(r(a_0),a_1),a_2)\dots a_n)=c^{n+1}(r(a_0),a_1,\dots a_n)$.

$K^{n+1}(x_0,\dots x_n)=K^2([x_0,\dots x_{n-1}],x_n)$.

$K^n(c(x_0,x_1),x_2,\dots x_n)=K^2([c(x_0,x_1),\dots x_{n-1}],x_n)=\varphi(l([c(x_0,x_1),\dots$ $x_{n-1}]),c(r([c(x_0,x_1),\dots x_{n-1}]),x_n))=[$ так как $r(c(x_0,x_1))=x_1,l(c(x_0,x_1))$ $=x_0]=\varphi(l(c(x_0,x_1)),c(c^{n-1}(x_1,\dots\ x_{n-1}),x_n))=\varphi^2(x_0,c^n(x_1,\dots x_n))=$ $\varphi^{n+1}(x_0,\dots x_n)$. □

Теорема 5.16 *K^{n+1} — ч.р.ф., универсальная для ЧРФ$_n$.*

Доказательство.
($\Rightarrow$) K^{n+1} — ч.р.ф. $\Rightarrow \forall a\in\mathbb{N}\ K^{n+1}(a,\bar{x})\in$ ЧРФ$_n$.
($\Leftarrow$) Пусть f — n-местная ч.р.ф. Рассмотрим $g(y,x_1,\dots x_n)\leqslant f(\bar{x})=$ $f(x_1,\dots x_n)+o(y)$. $g(y,\bar{x})\in$ ЧРФ$_{n+1}\Rightarrow\exists a\in\mathbb{N}\ :\ g(y,x_1,\dots x_n)=$ $\varphi^{n+2}(a,y,x_1,\dots x_n)=K^{n+1}(c(a,y),x_1,\dots x_n)$.

$b\leqslant c(a,0)$

$f(x_1,\dots x_n)=g(0,x_1,\dots x_n)=K^{n+1}(c(a,0),\bar{x})=K^{n+1}(b,x_1,\dots x_n)\Rightarrow$ $K^{n+1}(b.x_1,\dots x_n)\Rightarrow K^{n+1}$ — универсальная. □

Следствие 5.17 *Любая ч.р.ф имеет бесконечно много клинивских номеров.*

Доказательство. Очевидно: $b_nc(a,n)$ □

Теорема 5.18 ($s-m-n$ теорема) *$\forall m,n\ \exists$ п.р.ф. $S^n_m(x_0,\dots x_n)$:*
$K^{n+m}(x_0,\dots x_{n+m})=K^{m+1}(S^n_m(x_0,\dots x_n),x_{n+1},\dots x_{n+m})$.

Доказательство. $S^n_m(x_0,\dots x_n)\leqslant[x_0,\dots x_n]$ — п.р.ф. Тогда $K^{m+n+1}(x_0,$ $\dots\ x_{n+m})=K^{n+m}([x_0,x_1],\dots x_{n+m})=\dots=K^{m+1}([\dots[x_0,x_1],x_2]\dots x_n],$ $x_{n+1},\dots x_{n+m})=K^{m+1}([x_0,\dots x_n],x_{n+1},\dots x_{n+m})$ □

Теорема 5.19 (Клини о неподвижной точке) *Для любой ч.р.ф. $h(x_1,\dots x_{n+1})$ существует п.р.ф. $g(x_1,\dots x_n)\ :\ K^2(h(x_1,\dots x_n,g(x_1,\dots$ $x_n),y)=K^2(g(x_1,\dots x_n),y)$.*

Доказательство. Рассмотрим $K(h(x_1, \dots x_n, [z, z, x_1, \dots x_n]), y)$. Это ч.р.ф. $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} \ : \ K(h(x_1, \dots x_n, [z, z, x_1, \dots x_n]), y) = K^{n+3}(a, z, x_1, \dots x_n, y)$.

Положим $g(x_1, \dots x_n) \leqslant [a, a, x_1, \dots x_n]$ — п.р.ф. $K(h(x_1, \dots x_n, [a, a, x_1, \dots x_n], y) = K^{n+3}(a, a, x_1, \dots x_n, y) = K([a, a, x_1, \dots x_n, y]) = K(h(x_1, \dots x_n, g(x_1, \dots x_n), y) = K(g(x_1, \dots x_n), y)$. □

Обозначение. $\varkappa(n) \leqslant K(n, x)$, $\varkappa$ — клинивская нумерация одноместных ч.р.ф.

Следствие 5.20 *а) Для любой ч.р.ф.* $h(x_1, \dots x_n)$ *существует п.р.ф.* $g(x_1, \dots x_n) \ : \ \varkappa(h(x_1, \dots x_n, g(x_1, \dots x_n)) = \varkappa(g(x_1, \dots x_n))$.

б) Для любой ч.р.ф. $h(x)$ $\exists a \in \mathbb{N} \ : \ \varkappa(h(a)) = \varkappa(a)$.

Теорема 5.21 (Райса) *Пусть* $A \subseteq$ *ЧРФ*$_1$, $A \neq \emptyset$, $A \neq$ *ЧРФ*$_1$. *Тогда* $B = \{n \mid \varkappa(n) \in A\}$ *— не рекурсивно.*

Доказательство. (от противного) Пусть B — рекурсивно, $B \neq \emptyset$, $B \neq \mathbb{N}$ $\Rightarrow \nexists \varkappa_B$ — рекурсивно. $\varkappa_B = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$. $\exists a, b \in \mathbb{N} \ : \ a \in B, b \notin B$. $f(x) \leqslant b\varkappa_B(x) + a \cdot \overline{sg}\varkappa_B(x)$ — ч.р.ф. $\Rightarrow \exists n \notin \varkappa(n) = \varkappa(f(n))$.

$\varkappa(n) \in A$ — ?

1. $\varkappa(n) \in A \Rightarrow n \in B \Rightarrow f(n) = b \notin B \Rightarrow \varkappa(n) = \varkappa(f(n)) = \varkappa(b) \notin A$ — противоречие $\Rightarrow$ 2).

2. $\varkappa(n) \notin A \Rightarrow n \notin B \Rightarrow f(n) = a \in B \Rightarrow \varkappa(n) = \varkappa(f(n)) = \varkappa(a) \in A$ — противоречие $\Rightarrow \varkappa_B$ — не рекурсивно $\Rightarrow B$ — не рекурсивно. □

6 Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества

Определение 6.1 A *— рекурсивное, если* $\varkappa_A = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ *— о.р.ф.*
A *— примитивно рекурсивное множество, если* $\varkappa_A$ *— п.р.ф.*
A *— рекурсивно-перечислимое множество, если существует рекурсивное* B*:* $A = \{\bar{x} \mid \exists y \ (\bar{x}, y) \in B\}$.

Предложение 6.2 $A, B \in \mathbb{N}^k$, $C \subseteq \mathbb{N}^l$, A, B, C *— рекурсивные множества (п.р.м.). Тогда* $A \cup B, A \cap B, \overline{A} \leqslant \mathbb{N}^k \setminus A$, $A \setminus B$, $A \times C$ *— р.м (п.р.м).*

Доказательство. $\varkappa_A, \varkappa_B, \varkappa_C$ — о.р.ф (п.р.ф).
$\varkappa_{A\cup B}(\bar{x}) = sg(\varkappa_A(\bar{x}) + \varkappa_B(\bar{x}))$,
$\varkappa_{A\cap B}(\bar{x}) = \varkappa_A(\bar{x}) \cdot \varkappa_B(\bar{x})$,
$\varkappa_{\overline{A}}(\bar{x}) = \overline{sg}\varkappa_A(\bar{x})$,
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$,
$\varkappa_{A\times C}(\bar{x}, \bar{y}) = \varkappa_A(\bar{x}) \cdot \varkappa_C(\bar{x})$. □

Предложение 6.3 *$A \subseteq \mathbb{N}^k$, $B = \{c^k(\bar{a}) \mid \bar{a} \in A\}$. A — р.м. (п.р.м) $\iff$ B — р.м. (п.р.м).*

Доказательство.
($\Rightarrow$) A — р.м (п.р.м) $\Rightarrow$ $\varkappa_A$ — о.р.ф (п.р.ф). $\varkappa_B(x) = \varkappa_A(c_l^k(x), \dots c_k^k(x))$ $\Rightarrow$ $\varkappa_B$ — о.р.ф (п.р.ф).
($\Leftarrow$) B — р.м (п.р.м) $\Rightarrow$ $\varkappa_B$ — о.р.ф (п.р.ф). $\varkappa_A(x_1, \dots x_n) = \varkappa_B(c^k(x_1, \dots x_k))$ $\Rightarrow$ $\varkappa_A$ — о.р.ф (п.р.ф) $\Rightarrow$ A — р.м (п.р.м). □

Теорема 6.4 (Поста) *A — рекурсивно $\iff$ $A, \overline{A}$ — рекурсивно-перечислимые множества.*

Доказательство.
($\Rightarrow$) A — рекурсивное $\Rightarrow$ $\overline{A}$ — рекурсивное, $A\times\mathbb{N}$ — рекурсивное. Заметим, что $A = \{\bar{x} \mid \exists n\ (\bar{x}, n) \in A \times \mathbb{N}\}$.

Рис.

$\Rightarrow$ A — р.п.м.

Аналогично, $\overline{A}$ — р.п.м.

($\Leftarrow$) $A, \overline{A}$ — р.п.м $\Rightarrow$ существуют рекурсивные B, C: $A = \{\bar{x} \mid \exists y\ (\bar{x}, y) \in B\}$, $\overline{A} = \{\bar{x} \mid \exists y\ (\bar{x}, y) \in C\}$.

Рис.

$\varkappa_A(\bar{x}) = \varkappa_B(\bar{x}, \mu y(\overline{sg}(\varkappa_B(\bar{x}, y) + \varkappa_C(\bar{x}, y)) = 0))$. □

Теорема 6.5 (о проекции) *Пусть $B = \{\bar{x} \mid \exists y\ (\bar{x}, y) \in A\}$, A — р.п.м. Тогда B — р.п.м.*

Доказательство. A — р.п.м $\Rightarrow \exists$ р.м. C : $A = \{(\bar{x}, y) \mid \exists z\ (\bar{x}, y, z) \in C\}$.

$D \leqslant \{(\bar{x}, v) \mid (\bar{x}, l(v), r(v)) \in C\}$. Тогда $\varkappa_D(\bar{x}, v) = \varkappa_C(\bar{x}, l(v), r(v))$ — о.р.ф. $\Rightarrow$ D — р.м.

$\bar{x} \in B \iff \exists y\ (\bar{x}, y) \in A \iff \exists y\ \exists z\ (\bar{x}, y, z) \in C \iff \exists n\ (\bar{x}, l(n), r(n)) \in C \iff \exists n\ (\bar{x}, n) \in D$, то есть $B = \{\bar{x} \mid \exists\ (\bar{x}, n) \in D\} \Rightarrow B$ — р.п.м. □

Следствие 6.6 *$A \subseteq \mathbb{N}^{k+l}$, A — р.п.м, $B = \{\bar{x} \mid \exists y\ (\bar{x}, y) \in A\}$. Тогда B — р.п.м.*

Доказательство. l раз применяем теорему 6.5. □

Предложение 6.7 *$A, B \subseteq \mathbb{N}^k$, $C \subseteq \mathbb{N}^l$, A, B, C — р.п.м. Тогда $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times C$ — р.п.м.*

Доказательство. на семинаре.

Теорема 6.8 (Об эквивалентности определений р.п.м.) *Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Эквивалентны:*

1. *A — р.п.м,*
2. *$\exists$ ч.р.ф. f : $A = \delta f$ (область определения),*
3. *$\exists$ ч.р.ф. f : $A = \rho f$ (область значений),*
4. *$A = \emptyset$, либо $\exists$ п.р.ф. f : $A = \rho f$,*
5. *$\exists$ п.р.м. B : $A = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in B\}$,*
6. *$A = \emptyset$, либо $\exists$ о.р.ф. f : $A = \rho f$.*

Доказательство.
(1$\Rightarrow$ 2) A — р.п.м $\Rightarrow \exists$ р.м. B : $A = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in B\}$. $f(x) \leqslant \mu y(\overline{sg}\varkappa_B(x, y) = 0)$. $\varkappa_B$ — ч.р.ф. $\Rightarrow f$ — ч.р.ф. Заметим, что $x \in A \iff \exists y\ \overline{sg}\varkappa_A(x, y) = 0 \iff f(x)$ — определена $\Rightarrow A = \delta f$.
(2$\Rightarrow$ 3) Пусть g — ч.р.ф, $A = \delta g$, $f(x) \leqslant x + o(g(x)) \Rightarrow \rho f = \delta f = \delta g \Rightarrow A = \rho f$.
(3$\Rightarrow$ 4) Пусть $A \neq \emptyset$, $A = \rho g$, g — ч.р.ф $\Rightarrow \exists a \in A$ $\exists$ п.р.ф. h $g(z) = l(\mu y(h(z, y) = 0))$ — по теореме о нормальной форме Клини.

Пусть $x = c(y, z) \Rightarrow y = l(x), z = r(x)$. Рассмотрим $t(x) \leqslant [\overline{sg}h(r(x), l(x))] \cdot sg \prod_{i=1}^{l(x)} h(r(x), i \dot{-} 1)$ — п.р.ф.

$f(x) \leqslant l(l(x))t(x) + a \cdot \overline{sg}t(x)$ — п.р.ф. Заметим, что $d \in A \iff \exists z\ d = g(z) \iff \exists z\ \exists y\ y$ — первый: $h(z, y) = 0$, $d = l(y) \iff \exists x = c(y, z)$: $z = r(x), y = l(x)$, $t(x) = 1$ и $d = l(l(x)) \iff d = f(x) \Rightarrow A = \rho f$.
(4 $\Rightarrow$ 5) Если $A = \emptyset$, то $A = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in \emptyset\}$, $\varkappa_\emptyset(x, y) = o(x)$ — п.р.ф. $\Rightarrow \emptyset$ — п.р.м. Пусть $A \neq \emptyset$, $\exists$ п.р.ф f $A = \rho f$. Обозначим $B \leqslant \{(x, y) \mid f(y) = x\} = (G_f)^{-1}$. Тогда $\varkappa_B(x, y) = \overline{sg}\,|f(x) - y|$ — п.р.ф. $\Rightarrow B$ — п.р.м.

$A = \rho f = \{x \mid \exists y\ f(y) = x\} = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in B\}$.
(5$\Rightarrow$ 1) $A = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in B\}$, B — п.р.м $\Rightarrow B$ — р.м. $\Rightarrow A$ — р.п.м.
(4$\Rightarrow$ 6) Пусть $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ п.р.ф. f $A = \rho f \Rightarrow f$ — о.р.ф.
(6$\Rightarrow$ 3) Если $A \neq \emptyset$, то $\exists$ о.р.ф. f $A = \rho f \Rightarrow f$ — ч.р.ф.

Пусть $A = \emptyset$. Тогда рассмотрим $\omega(x) \leqslant \mu y(s(y) + x = 0)$ — нигде не определена $\Rightarrow \rho\omega = \emptyset = A$. $\square$

Предложение 6.9 *Пусть* $A \subseteq \mathbb{N}^k$, $B = \{c^k(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A\}$. *Тогда* A — *р.п.м* $\iff$ B — *р.п.м.*

Доказательство. (на семинаре.)

Следствие 6.10 $A \subseteq \mathbb{N}^k$, A — *р.п.м.* $\iff$ $\exists$ *ч.р.ф.* f $A = \delta f$.

Доказательство. Рассмотрим $B \leqslant \{c^k(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A\}$
($\Rightarrow$) A — р.п.м $\Rightarrow$ B — р.п.м. $\Rightarrow \exists$ ч.р.ф. g $B = \delta g$. $f(\bar{x}) \leqslant g(c^k(\bar{x})) \Rightarrow A = \delta f$, так как $\bar{x} \in \delta f \iff f(\bar{x})$ определена $\iff g(c^k(\bar{x}))$ определена $\iff c^k(\bar{x}) \in B \iff \bar{x} \in A$.
($\Leftarrow$) $A = \delta f$, f — ч.р.ф. $g(x) \leqslant f(c_1^k(x), \ldots, c_k^k(x)) \Rightarrow g$ — ч.р.ф.

$x \in \delta g \iff (c_1^k(x), \ldots c_k^k(x)) \in \delta f \iff (c_1^k(x), \ldots c_k^k(x)) \in A \iff x \in B \Rightarrow B = \delta g \Rightarrow B$ — р.п.м. $\Rightarrow$ по предложению 6.9 A — р.п.м. $\square$

Обозначение. $G_f \leqslant \{(\bar{x}, y) \mid f(\bar{x}) = y\}$ — график функции f.

Теорема 6.11 (О графике) f — *ч.р.ф.* $\iff$ G_f — *р.п.м.*

Доказательство.
($\Rightarrow$) f — ч.р.ф. $f(\bar{x}, y) \leqslant \mu z(|f(\bar{x}) - y| = 0) \Rightarrow [(\bar{x}, y) \in \delta g \iff |f(x) - y| = 0 \iff f(x) = y \iff (\bar{x}, y) \in G_f] \Rightarrow G_f = \delta f \Rightarrow G_f$ — р.п.м.
($\Leftarrow$) G_f — р.п.м. $\Rightarrow \exists$ р.м. A : $G_f = \{(\bar{x}, y) \mid \exists z\ (\bar{x}, y, z) \in A\}$.

$f(\bar{x}) \leqslant l(\mu t(\overline{sg}\varkappa_A(\bar{x}, l(t), r(t)) = 0))$.

$f(\bar{x})$ определена, то $\exists y\ (\bar{x}, y) \in G_f \iff \exists z\ (\bar{x}, y, z) \in A \iff \exists t = c(y, z)$: $\varkappa_A(\bar{x}, l(t), r(t)) = 1 \Rightarrow f(\bar{x}) = l(t) = y$.

Если $f(\bar{x})$ не определена, то $\nexists t \Rightarrow f$ — ч.р.ф. $\square$

Определение 6.12 $A \subseteq \mathbb{N}^k$. $\varkappa_A^* \leqslant \begin{cases} 1, & \bar{x} \in A, \\ \textit{не определена}, & \bar{x} \notin A \end{cases}$.

Следствие 6.13 A — *р.п.м.* $\iff$ $\varkappa_A^*$ — *ч.р.ф.*

Доказательство.
($\Rightarrow$) A — р.п.м $\Rightarrow \exists$ ч.р.ф. f $A = \delta f \Rightarrow \varkappa_A^* = s(o(f(\bar{x})))$.
($\Leftarrow$) $\varkappa_A^*$ — ч.р.ф., $A = \delta\varkappa_A^* \Rightarrow A$ — р.п.м. $\square$

Теорема 6.14 (о составном определителе) *Пусть* $A_1, \ldots A_n$ — *р.п.м,* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$. *Пусть* $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ — *ч.р.ф.*

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} \varphi_1(\bar{x}), & \bar{x} \in A_1, \\ \ldots & \\ \varphi_n(\bar{x}), & \bar{x} \in A_n, \\ \textit{не определена}, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Тогда f — *ч.р.ф.*

Доказательство. A_i — р.п.м $\Rightarrow \exists B_i\ A_i = \{\bar{x} \mid \exists y\ (\bar{x}, y) \in B_i\}$. $g(\bar{x}) \leqslant \mu y((\prod_{i=1}^{n} \varkappa_{B_i}(\bar{x}, y)) = 0) \Rightarrow g$ — ч.р.ф, $\delta g = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

$f(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})\varkappa_{B_i}(\bar{x}, g(\bar{x})) + \ldots + \varphi_n(\bar{x})\varkappa_{B_n}(\bar{x}, g(\bar{x}))$ — ч.р.ф. □

7 Теорема Геделя о полноте

$\Sigma_0 \leqslant \langle +, *, S, 0\rangle$, $F(\Sigma_0)$ — множество формул сигнатуры Σ_0 с параметрами $v_0, v_1, \ldots$.

$T(\Sigma_0)$ — множество термов с переменными $v_0, v_1 \ldots$.

Определение 7.1 *Геделевская нумерация термов и формул сигнатуры* Σ_0.

1. $\gamma(0) \leqslant c(0,1)$, $\gamma(v_i) \leqslant c(1,i)$,
2. $\gamma(s(t)) \leqslant c(2, \gamma(t))$,
3. $\gamma(s+q) \leqslant c(3, c(\gamma(t), \gamma(q)))$,
4. $\gamma(t*q) \leqslant c(4, c(\gamma(t), \gamma(q)))$,
5. $\gamma(t=q) \leqslant c(5, c(\gamma(t), \gamma(q)))$,
6. $\gamma(t<q) \leqslant c(6, c(\gamma(t), \gamma(q)))$,
7. $\gamma(\varphi\ \&\ \psi) \leqslant c(7, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$,
8. $\gamma(\varphi\ \vee\ \psi) \leqslant c(8, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$,
9. $\gamma(\varphi \to \psi) \leqslant c(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$,
10. $\gamma(\neg\varphi) \leqslant c(10, \gamma(\varphi))$,
11. $\gamma(\exists v_i\ \varphi) \leqslant c(11, c(i, \gamma(\varphi)))$,
12. $\gamma(\forall v_i\ \varphi) \leqslant c(12, c(i, \gamma(\varphi)))$.

Предложение 7.2 $\gamma(F(\Sigma_0))$, $\gamma(T(\Sigma_0))$ *— п.р.м.*

Обозначения. $s(x,y) \leqslant ex(y,x)$
$\forall n\ \forall a_0, \ldots a_n\ \exists x = p_0^{a_0} \ldots p_n^{a_n}\ s(x,0) = a_0, \ldots s(x,n) = a_n$.

Определение 7.3 $X \subseteq F(\Sigma_0) \cup T(\Sigma_0)$.
X *— разрешимо, если* $\gamma(X) \leqslant \{\gamma(a) \mid a \in X\}$ *— рекурсивно.*
X *— перечислимо, если* $\gamma(X)$ *— р.п.м.*

Предложение 7.4 *Множество T_{Σ_0} тождественно истинных формул сигнатуры Σ_0 перечислимо.*

Доказательство.

$$f(x,n,y) \leqslant \begin{cases} y, & \text{если } s(x,n)=n,\ \gamma^{-1}(s(x,0)),\dots\gamma^{-1}(s(x,n)) \\ & \text{— доказательство в ИП}_{\Sigma_0}, \\ \gamma(v_0=v_0), & \text{иначе.} \end{cases}$$

□

Лемма 7.5 f — *о.р.ф.*

$\rho f = \gamma(T_{\Sigma_0}) \Rightarrow T_{\Sigma_0})$ — перечислимо.

Следствие 7.6 *Перечислимо аксиоматизированная теория — перечислима.* $A \subseteq F(\Sigma_0)$, A — *перечислима* $\Rightarrow A' \leqslant \{\varphi \in F(\Sigma_0) \mid A \vdash \varphi\}$ — *п.р.ф.*

Доказательство.

$$f_A(x,n,y) \leqslant \begin{cases} y, & \text{если } s(x,n)=y,\ \gamma^{-1}(s(x,n)),\dots\gamma^{-1}(s(x,n)) \\ & \text{— доказательство из } A, \\ \gamma(v_0=v_0), & \text{иначе.} \end{cases}$$

□

Лемма 7.7 f_A — *о.р.ф.*

$A' = \rho f_A$.

Определение 7.8 T — *полна, если* $\forall\varphi \in S(\sigma(T))$ *либо* $\varphi \in T$, *либо* $\neg\varphi \in T$.
T — *непротиворечива, если* $\forall\varphi \in S(\sigma(T))$ *если* $\varphi \in T$, *то* $\neg\varphi \notin T$.
T — *теория, если* $\forall\varphi \in S(\sigma(T))$ *из* $T \vdash \varphi$ *следует* $\varphi \in T$.

Теорема 7.9 *Полная перечислимая теория сигнатуры Σ_0 является разрешимой.*

Доказательство. Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, T — полна, перечислима.

а) T — противоречива, то есть $\forall\varphi \in S(\Sigma_0)$ $\varphi \in T \Rightarrow \gamma(T) = \gamma(S(\Sigma_0))$ — р.м $\Rightarrow T$ — разрешима.

Предложение 7.10 $\Gamma(S(\Sigma_0))$ — *р.м.*

б) T — непротиворечива, $A = \gamma(T)$ — р.п.м $\Rightarrow \exists$ р.м. B : $A = \{x \mid \exists y\ (x,y) \in B\}$. $\varkappa_B$ — о.р.ф. Тогда $\varkappa_A(x) = \varkappa_B(x, \mu y(\overline{sg}(\varkappa_B(x,y) + \varkappa_B(c(10,x),y) = 0))$ — о.р.ф. $\Rightarrow A$ — р.м. $\Rightarrow T$ — разрешима. □

Формальная арифметика Пеано.

Определение 7.11 *Система аксиом* A_0.

1. $(\forall v_0)\ \neg(s(v_0) = 0)$
2. $((s(v_0) = s(v_1)) \to (v_0 = v_1))$
3. $(v_0 + 0) = v_0$
4. $(v_0 + s(v_1)) = s(v_0 + v_1)$
5. $v_0 * 0 = 0$
6. $((v_0 * s(v_1)) = v_0 * v_1 + v_0$
7. $\neg(v_0 < 0)$
8. $((v_0 < s(v_1)) \to ((v_0 < v_1)\ \vee\ (v_0 = v_1)))$
9. $(((v_) < v_1)\ \vee\ (v_0 = v_1)) \to (v_0 < s(v_1)))$
10. $((\neg(v_) = v_1) \to ((v_0 < v_1)\ \vee\ (v_1 < v_0)))$

Коды: $\underline{0} \lesseqgtr 0$; $\underline{n+1} \lesseqgtr s(\underline{n})$; $1 = s(0)$; $\underline{2} = s(s(0))$, $\ldots$

Определение 7.12 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, f *— представима в* A_0, *если* $\exists \varphi(v_0, \ldots\ v_n) \in F(\Sigma_0)\ :\ \forall k_1, \ldots k_n, l \in \mathbb{N}$ *если* $f(k_1, \ldots k_n) = l$, *то* $A_0 \vdash \varphi(k_1, \ldots k_n, l)$; *если* $f(k_1, \ldots k_n) \neq l$, *то* $A_0 \vdash \neg\varphi(k_1, \ldots k_n, l)$.

Теорема 7.13 *Всякая о.р.ф представима в* A_0.

Доказательство. индукция по построению о.р.ф. В силу теоремы Клини о нормальной форме общерекурсивная функция может быть получена при помощи о.р.ф.

1. $o(v_0)\ \varphi(v_0, v_1) \lesseqgtr (v_1 = 0)$, $s(v_0)\ \varphi(v_0, v_1) \lesseqgtr (v_1 = s(v_0))$, $I^n_m(v_0, \ldots\ v_{n-1})\ \varphi(v_0, \ldots v_n) \lesseqgtr (v_n = v_m)$.
2. а) $f(v_0, \ldots v_{n-1}) = h(g_1(\bar{v}), \ldots g_n(\bar{v}))$, φ_i — представляет g_i, ψ представляет h, f представляется функцией: $\xi(v_0, \ldots v_n) \lesseqgtr (\exists z_1, \ldots, \exists z_n)\ (\varphi_1(\bar{v}, z_1)\ \&\ \ldots \&\ \varphi_k(\bar{v}, z_k)\ \&\ \psi(z$
$\bar{v} = (v_0, \ldots v_{n-1})$.
б) $f(v_0, \ldots v_{n-1}, 0) = g(\bar{v})$,
$f(v_0, \ldots v_{n-1}, v_n + 1) = h(\bar{v}, v_n, f(\bar{v}, v_n))$
φ представляет g, ψ представляет h. Тогда f представляется формулой:
$\xi(v_0, \ldots v_{n+1}) \lesseqgtr \exists z\ (\varphi(\bar{v}, ex(0, z))\ \&\ (\forall \omega < v_n)\ (\psi(\bar{v}, \omega, ex(\omega, z), ex(\omega +$

$1, z)) \,\&\, (v_{n+1} = ex(v_n, z)))$.
в) $f(v_0, \ldots v_{n-1}) = \mu y(g(\bar{v}, y) = 0)$. Пусть φ представляет g. Тогда f представляется функцией: $\xi(v_0, \ldots v_n) = (\varphi(\bar{v}, v_n, 0) \,\&\, (\forall z < v_n)\, \neg\varphi(\bar{v}, z, 0))$.
□

Теорема 7.14 (Геделя о неразрешимости) *Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, T — непротиворечиво, $A_0 \subseteq T$. Тогда T неразрешима.*

Доказательство. $A \leqslant \gamma(T)$. Пусть T разрешима $\Rightarrow A$ — р.м. $\Rightarrow \varkappa_A$ — о.р.ф. Тогда рассмотрим функцию:

$$f(x, y) \leqslant \begin{cases} \gamma(\gamma^{-1}(x)^{v_0}_y, & x \in \gamma(F(\Sigma_0)), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

y — натуральное число или даже код. Если $x = \gamma(\varphi)$, то $f(x, y) = \gamma(\varphi^{v_0}_y)$.

Лемма 7.15 *f — п.р.ф.*

Рассмотрим функцию: $g(x, y) \leqslant \varkappa_A(f(x, y))$ — о.р.ф. $\Rightarrow g(v_0, v_1)$ представлена в A_0 функцией $\varphi(v_0, v_1, v_2)$.
$n \leqslant \gamma(\varphi(v_0, v_0, 0))$. Тогда $f(n, n) = \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))$, $g(n, n) =?$
а) $g(n, n) = \varkappa_A(f(n, n)) = 1 \Rightarrow g(n, n) \neq 0 \Rightarrow A \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow$ так как $A_0 \subseteq T \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$ и так как T — непротиворечиво $\Rightarrow T \nvdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$ $\Rightarrow A_0 \nvdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)) \notin A \Rightarrow \varkappa_A(\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))) = 0$, то есть $\varkappa_A(f(\underline{n}, \underline{n})) = 0$ — противоречие.
б) $\varkappa_A(f(n, n)) = 0 = g(n, n) \Rightarrow \varkappa_A(\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))) = 0 \Rightarrow T \nvdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow$ $A_0 \nvdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow \varkappa_A(f(n, n)) \neq 0 \Rightarrow \varkappa_A(f(n, n)) = 1$ — противоречие. $\Rightarrow$ T — неразрешима. □

Следствие 7.16 (Теорема Черча о неразрешимости) *Множество теорем $ИП_{\Sigma_0}$ неразрешимо.*

Доказательство. Пусть TU_{Σ_0} разрешимо. $A_0 \vdash \varphi \iff \vdash (\& A_0 \to \varphi)$ — неразрешимо, противоречие. □

Теорема 7.17 (Геделя о неполноте) *$T \subseteq S(\Sigma_0)$, T перечислима, $A_0 \subseteq T$, T непротиворечива. Тогда T не полна.*

Доказательство. T — полна $\Rightarrow T$ разрешима — противоречие $\Rightarrow T$ — не полна. □