Лекции по Математической логике

Профессор, член-корреспондент РАН С.С.Гончаров

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

gonchar@math.nsc.ru

L1

Лекция 1. Предмет математической логики.

Математическая логика как одно из важнейших направлений современной математики берет свое начало с конца девятнадцатого века. Это было связано с новым этапом в развитии математики, когда предметом ее изучения стали идеальные бесконечные объекты. Работа с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами, с бесконечными рядами, непрерывными и разрывными функциями потребовала обратить внимание на те средства, которые используются в работе математиков и сами основания этой древнейшей науки. Необходимо было понять что же такое доказательство в математики и как оно связано с истинностью исследуемого свойства. Что же такое истинность математического утверждения и что же является предметом изучения математики, почему математические методы так эффективны в познании окружающего нас мира. Естественно что большая часть этих вопросов связано не только с математикой, но относится к методологии научного познания и философии математики и науки в целом. В тоже время их исследование может быть получено лишь в тесном применении математических методов и методологии и философии математики.

Одним из классических разделов философии является логика. Логика — это наука об умозаключениях или методах рассуждений, методах познания. При этом большее внимание уделяется форме, а не содержанию соответствующих рассуждений. В качестве примера возьмем следующее простое рассуждение.

Пример 1. Юрий и Валерий братья. Юрий носит фамилию Белов. Братья носят одну и ту же фамилию. Следовательно, Валерий носит фамилию Белов.

В повседневной жизни посылка "Братья носят одну и ту же фамилию"могла бы быть опущена, по крайней мере пока бы не возникли сомнения в ее правильности. Но для целей логического анализа все посылки должны быть сформулированы явно. В таком случае это рассуждение верно в силу своей формы и не зависит от истинности или ложности посылок. Сравним его с другим рассуждением, имеющим ту же форму.

Пример 2. Числа $i - \sqrt{3}/3, \omega$ суть комплексные числа, отношение которых действительное положительное число. Аргумент ω равен $2\pi/3$. Комплексные числа, отношение которых есть действительное положительное число, имеют один и тот же аргумент. Следовательно, аргумент $i - \sqrt{3}/3$ равен $2\pi/3$.

Ясно, что форма этого рассуждения та же, но содержание другое.

Но не всегда текстуальное следование форме позволяет сделать правильный вывод. Рассмотрим, следуя Алонзо Черчу, следующие два примера.

Пример 3. Я видел портрет Джона Буса. Джон Бус убил Авраама Линкольна. Следовательно, я видел портрет убийцы Авраама Линкольна.

Пример 4. Я видел портрет некоего мужчины. Некто изобрел колесо. Следовательно я видел портрет изобретателя колеса.

Внешнее сходство здесь обманчиво.В данном случае ошибка быстро обнаруживается, когда мы не ограничиваясь внешним сходством, обращаемся к содержанию. По этой причине как отмечает А.Черч нам не только желательно, но и просто необходимо, употреблять для логических целей специально созданный формальный язык. Этот язык в противоположность обычному языку будет следовать за логической формой и воспроизводить ее даже в ущерб краткости и легкости общения. Введение особого формализованного языка означает принятие *особой* теории, или системы логического анализа. Именно это является главной отличительной чертой формализованного языка, а вовсе не то, что оказалось удобным заменить отдельными буквами и различными специальными символами слова, которые в написании в большинстве обычных языков составляются из нескольких букв.

Математическая логика — это часть логики, которая занимается построением математических моделей рассуждений и истинности. Интерес крупнейших математиков к математической логике в конце девятнадцатого и начале двадцатого века был прежде всего связан с проблемой построения надежных оснований математики и разрешением обнаруженных парадоксов.

Пока математика работала с конечными объектами: натуральными числами, рациональными числами и геометрическими объектами — проблем больших не возникало, в связи с применимостью обычных методов и большой наглядностью. Хотя как легко заметить уже и на уровне школьной геометрии можно обнаружить довольно много ошибочных решений, предлагаемых например на вступительных экзаменах задач из-за потерянных решений в связи с использованием геометрических представлений, которые приводят в силу наглядности лишь к одной из возможностей.

Возникновение бесконечных идеальных объектов приводит к различным трудностям с пониманием, что такое корректное рассуждение или доказательство для этих идеальных предельных конструкций.

В основу решения этой проблемы обоснования математики было положено предложенное Г.Кантором понятие множества, позволяющее из этой единой основы определить все математические понятия. Но быстро было понято, что обращаться с понятием множества нужно достаточно осторожно, так как не любые конструкции с ними допустимы. Кроме того и сами способы доказательств, которые мы используем вызывали сомнения в их корректности.

Г. Кантор начал исследовать произвольные совокупности различных элементов как некоторое базисное понятие в математике. Кантор пришел к понятию множества из анализа. Его интересы были связаны с изучением бесконечных множеств вещественных чисел. А собственно проблема нахождения примитивных понятий для построения математики, которые можно положить в ее основу была решена Б.Расселом. Идея Рассела состояло в том чтобы показать, что математика это просто логика. Но логика в его понятии была значительно шире, чем она рассматривается сейчас. Сейчас мы можем сказать, что реально Б.Рассел показал, что формальная математика это логика и теория множеств. С достаточно большой внимательностью и аккуратностью можно показать, что определение любых математических понятий может сведено к понятиям теории множеств и логики, а все доказательства выведены в исчислении предикатов. В рамках построенной им теории множеств, которую мы будем называть наивной теорией множеств, Г.Кантор установил два важных результата, происходящие из анализа.

Первый из них связан со сравнением типа бесконечности множества натуральных чисел и множества рациональных чисел. Кантор перенумеровал все рациональные числа натуральными числами, расположив все положительные в виде матрицы бесконечной вправо и вниз. Нумерация определялась зигзагообразно по диагоналям, на которых стояли дроби с одинаковой суммой числителя и знаменателя.

$1/1 \longrightarrow 2/1 \qquad 3/1 \longrightarrow 4/1...$

$\swarrow$

$1/2 \qquad 2/2 \nearrow ...$

$\downarrow$

$1/3 \nearrow ...$

Этот результат Г.Кантора показывал, что среди вещественных чисел существует счетное всюду плотное множество. С другой стороны он сравнил множество вещественных чисел и множество натуральных чисел и показал, что вещественных чисел уже несчетное множество и таким образом в частности индукция к ним не применима. Сам метод доказательства этого результата широко применяется в настоящее время в математике и его называют диагональным методом. Доказательство этого факта ведется от противного. Пусть мы можем перенумеровать все вещественные числа $r_0, ..., r_n, ...$. Мы определим теперь новое число r, которое в десятичной записи имеет вид $0, \delta_0\delta_1\delta_2...$, где цифра δ_n в этом разложении равна 0, если n-тый знак в десятичном разложении числа r_n не равен 0 и

δ_n равно 1 в противном случае. Легко видеть что такое число r отлично от всех чисел в последовательности $r_0, ..., r_n, ...$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Таким образом мы доказали, что существуют бесконечные множества с различным числом элементов. Однако Б.Расселом было показано, что широкая трактовка множеств по Кантору (1895) быстро приводит к парадоксам.

Пример 1. (Парадокс Рассела, 1902 г.). Рассмотрим множество всех множеств Y. Определим теперь множество $X = \{x \in Y \mid x \notin x\}$. Подмножество элементов X выделяется в множестве всех множеств простым свойством и конечно же само является множеством. Рассмотрим теперь для него две возможности.

1) Если $X \in X$, то по определению элементов из X мы получаем, что $X \notin X$. Значит этот случай невозможен.

2) Если же мы рассмотрим вторую возможность $X \notin X$, то в силу выполнимости свойства определяющего элементы из Y, которые лежат в подмножестве X мы имеем, что $X \in X$. Что вновь противоречит нашему предположению.

Таким образом мы показали, что мы пришли к противоречию в обоих случаях и наша наивная теория множеств противоречива и не годится в качестве оснований математики.

Известны и другие логические парадоксы, связанные с более продвинутыми понятиями и результатами из теории множеств:

1. Парадокс Кантора, 1899 г. О мощностях множества всех множеств и множества всех его подмножеств.

2. Парадокс Бурали-Форти, 1897 г. О существовании множества всех ординальных чисел.

Но были обнаружены и другие парадоксы, носящие уже семантический характер :

1. Парадокс лжеца. Некто говорит:"Я лгу".

2. Парадокс Ришара, 1905г. С помощью фраз русского языка могут быть охарактеризованы те или иные вещественные числа. Все фразы русского языка могут быть перенумерованы некоторым стандартным способом, а именно лексикографически фразы содержащие одинаковое число букв, а фразы разной длины упорядочим по их длине. Опустив теперь в стандартной нумерации всех фраз все фразы не определяющие вещественных чисел, мы получаем нумерацию вещественных чисел, определимых фразами русского языка. Число, получающее при такой нумерации номер n назовем n-ым числом Ришара. Определим теперь число α фразой русского языка."Вещественное число, у которого в десятичной записи для любого натурального числа на соответствующем месте стоит нуль, если у соответствующего числа Ришара на этом десятичном знаке стоит не нуль и единица, в противном случае". Но это число определимо фразой русского языка и, следовательно, является числом Ришара, но оно определено так, что отличается от n-го числа Ришара в n-знаке.

3. Парадокс Берри, 1906 г. Рассмотрим натуральное число k со следующим свойством: наименьшее из натуральных чисел, которые не характеризуются никакой фразой русского языка, содержащей не более пятидесяти слогов. Но эта фраза содержит менее пятидесяти слогов. Противоречие.

4. Парадокс Греллинга, 1908 г. Рассмотрим прилагательные в русском языке. Определим два типа прилагательных. Автологические прилагательные, которым присуще названное свойство. Например: многосложный, русский, $\ldots$. Гетерологические прилагательные: которым не присуще названное свойство. Например: односложный, французский, голубой, $\ldots$. Рассмотрим теперь прилагательное "гетерологическое". К какому типу оно принадлежит. Если оно гетерологично, то оно не обладает этим свойством и, следовательно, оно не гетерологично. Если же оно автологично, то оно само должно обладать этим свойством, то есть оно гетерологическое и не автологическое.

С другой стороны широко известно и многообразие смысла некоторых фраз русского языка, что так же приводит к проблеме понимания математических доказательств. Особенно часто эта многозначность смысла возникает в длинных определений конструкций даже в математических доказательствах. А в наших обычных рассуждениях это встречается довольно часто, например: "Он ждал ее на поляне с цветами".

Все эти парадоксы подлинные, то есть не содержат логических изъянов.

Прежде всего необходимо выделить тот математический язык, который мы можем использовать в доказательствах, чтобы не возникали проблемы построения утверждений с неоднозначным смыслом. А также требуется уточнить и само понятие доказательства в математике. Для решения этих проблем было разработано исчисление предикатов. В Исчислении предикатов определен формальный язык и в нем было построено математически корректное понятие доказательства. Однако уже в определении понятия доказательства возникли разные подходы: классический и интуиционистский. Проблема с доказательством существования и использованием методов доказательства от противного.

Однако проблема выбора оснований математики и обоснование их корректности также привело к различным подходам к их решению. Принципы решений:

1. Д.Гильберт исследовал непротиворечивость различных теорий, возникающих в математике. По его мнению для развития теории и ее надежности необходимо доказать ее непротиворечивость.

2. Э.Цермело — аксиоматический метод построения теории множеств.

3. Б.Рассел и А.Уайтхед — теория типов. В теории типов с каждым объектом связывается тип этого объекта и элементы множества имеют меньший тип, чем само это множество. Такой подход позволяет избавится от парадокса Рассела.

4. Дескриптивная теория множеств. Борель,Бэр, Лебег, Суслин, Александров, Лузин, Новиков, Серпинский, Я.Москoвакис. В этой теории расматриваются только "простые"множества действительных чисел и изучаются их свойства.

Эта теория оказалась тесным образом связана с теорией вычислимости и теорией допустимых множеств.

Давид Гильберт предложил проверить непротиворечивость системы, в рамках системы определить понятие "доказательство"и его использовать. Построить конечное обоснование этой области. С другой стороны возникает проблема семантики формальных языков и построения семантики для их различных аксиоматизаций. В то же время с построением формальных языков и их точной семантики становится актуальной проблема построения универсального способа решения всех математических проблем формулируемым на этом формальном языке. Таким образом возникает проблема анализа алгоритмов решения математических проблем и построение математического понятия алгоритма. И это было сделано работами математиками из разных стран. Это открытие привело к непредсказуемым последствиям. В математике были доказаны знаменитые теоремы Геделя о неполноте и А.Черча о неразрешимости Исчисления предикатов. В технике и в жизни нашей цивилизации произошли коренные изменения как в технологиях, так и в возможностях человека для работы с информацией и познании окружающего нас мира.

Итак задача нашего курса построить математическую теорию, в рамках которой мы сможем дать точное математическое определение таких важных понятий как "Доказательство"утверждения, "Истинность"утверждения, "алгоритм"и "вычислимость", а так же установить фундаментальные свойства этих понятий и связи меду ними. Мы также хотим построить аксиоматическую теорию множеств, которая лежит в основаниях современной математики, и ответить на вопрос Лейбница: "Есть ли некоторый универсальный способ решения всех математических проблем?

L 2

Лекция 2. Наивная теория множеств.

При определении наивной теории множеств, чтобы избежать конфликтов с существованием множества всех множеств, мы будем предполагать,что мы имеем некоторый класс множеств $\mathbf{U}$. Мы также предполагаем, что сам он не является элементом этого класса. Мы налагаем некоторую простую систему свойств множеств из этого класса. Мы будем добавлять новые требования на правила работы с множествами из этого класса по мере надобности определить новые конструкции над множествами из этого класса. Мы будем называть этот фиксированный класс объектов $\mathbf{U}$ "Универсум $\mathbf{U}$". Для записи интересующих нас свойств мы будем использовать хорошо известные всем из курса анализа сокращения для записи некоторых стандартных выражений, встречающихся в записи свойств. Итак мы будем использовать сокращения: $x \in Y$ для записи свойства "x является элементом множества Y", а выражение $x \notin Y$ будет обозначать свойство "x не является элементом Y". Мы будем использовать также кванторы $(\forall x)$ и $(\exists x)$ для сокращения записи выражений "для любого элемента x"и "существует элемент x", соответственно. Мы также будем использовать логические связки: $\wedge$ для союза "и", $\vee$ для союза "или", $\Leftrightarrow$ для выражения "если и только если", $\Rightarrow$ для выражения "влечет"и $\neg$ для отрицания.

Нас интересует только из каких элементов состоит данное множество и никаких иных свойств множество не имеет.

По-этому в качестве первой аксиомы для нашего универсума мы требуем выполнимости *аксиомы равнообъемности*: $X = Y \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$.

Заметим, что в силу этой аксиомы мы имеем в нашем универсуме $\mathbf{U}$ не более одного множества не содержащего никаких элементов. Мы назовем такое множество пустым и будем его обозначать значком $\emptyset$.

Мы потребуем от нашего универсума существования в U пустого множества *аксиомы пустого множества*: Существует множество в нашем универсуме $\mathbf{U}$, которое не содержит ни одного элемента. Используя наши соглашения о сокращениях мы можем записать эту аксиому в виде: "Множество $\emptyset$ принадлежит нашему универсуму"либо в виде:

$(\exists X)(\forall Y)(Y \notin X)$.

Прежде всего мы хотим, чтобы мы могли определять над элементами из нашего универсума стандартные теоретико-множественные операции, которые необходимы в любой математической теории. Во-первых это операции объединения и пересечения. Мы потребуем существования множеств равных объединению и пересечению любых совокупностей множеств, которые образуют множество из нашего универсума. В частности это будет справедливо и для пар множеств. Но для этого нам нужно иметь возможность образовывать конечные множества из элементов нашего универсума. Чтобы обеспечить эти требования мы введем в качестве аксиом следующий набор требований к нашему универсуму. Мы будем использовать следующие также широко принятые обозначения для записи конкретных множеств. Для множества из нашего универсума, состоящего в точности из элементов набора $A_1, A_2, ..., A_n$, которое в силу аксиомы равнообъемности единственное в нашем универсуме, мы будем использовать обозначение $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Если же у нас есть некоторое свойство $\alpha(x)$ элементов x нашего универсума и совокупность всех таких элементов образует множество из нашего универсума, то это единственное, в силу аксиомы равнообъемности множество, мы будем обозначать через $\{a|\alpha(a)\}$.

Аксиома пары. Для любых элементов X, Y нашего универсума существует множество $\{X, Y\}$, состоящее в точности из элементов X и Y , то есть в более формализованной записи $(\exists Z)(X \in Z \wedge Y \in Z \wedge (\forall W)(W \in Z \to (W = X \vee W = Y)))$

Аксиома объединения. Для любого множества X совокупность элементов

$\{a|$ существует элемент Y из множества X такой, что $a \in Y$ и $Y \in X\}$, в более формальной записи с учетом наших соглашений совокупность элементов $\{a|(\exists Y)(Y \in X \wedge a \in Y \wedge Y \in X\}$ корректно определена и лежит в нашем универсуме. Мы ее будем обозначать через $\bigcup_{Y \in X} Y$ или $\cup X$.

Легко видеть теперь, что из аксиом пары и объединения для любых элементов Для любых элементов X, Y нашего универсума существует объединение $X \cup Y$, которое состоит из элементов лежащих в множестве X или Y, то есть равного множеству $\cup\{X, Y\}$.

Для определения пересечений отдельное требование нам не нужно. Мы введем дополнительную аксиому, которая позволяет определять в нашем универсуме подмножества.

Аксиома выделения. Пусть $\alpha(x)$ некоторое свойство теоретико - множественное в формальном языке теории множеств. Более точно этот язык будет построен при рассмотрении языка Исчисления предикатов. А сейчас будем понимать, что это свойство выражается только через отношение принадлежности с помощью логических связок и кванторов. Мы требуем чтобы для любого множества X из универсума в нашем универсуме нашлось множество Y такое, что оно состоит в точности из тех элементов множества X, которые удовлетворяют свойству $\alpha(x)$. В более формализованной записи можно выразить это требование в виде записи $(\forall X)(\exists Y)(\forall Z)(Z \in Y \leftrightarrow ((Z \in X) \wedge \alpha(Z)$.

Нетрудно видеть, что это требование влечет, что для любых множеств X, Y существуют в нашем универсуме множество $X \cap Y$ (пересечение множеств X, Y) и множество $\cap_{Y \in X} Y$ (пересечение множеств из X). Под пересечением $X \cap Y$ множеств X, Y мы понимаем множество состоящее из всех элементов лежащих одновременно и в X, и в Y. Под пересечением множеств из X мы понимаем множество состоящее в точности из тех элементов, которые входят в любое множество из X, которое и обозначаем одним из двух способов $\bigcap_{Y \in X} Y$ или $\cap X$.

Еще одна важная конструкция, которая часто используется в математике связана с определением подмножеств некоторого множества. Допустимость рассмотрения множества подмножеств любого множества задается аксиомой степени. Мы говорим, что множество X является подмножеством множества Y , если любой элемент их X является элементом Y, то есть $(\forall Z)(Z \in X \to Z \in Y)$. Мы будем использовать для отношения быть подмножеством $(\forall Z)(Z \in X \to Z \in Y)$ символическую запись $X \subseteq Y$. Заметим, что из аксиомы равнообъемности следует, что $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

Аксиома степени. Для любого множества X существует множество Y, состоящее из всех подмножеств множества X.

Это множество по свойству равнообъемности единственно в нашем универсуме и мы будем обозначать множество всех подмножеств X через $P(X)$. Таким образом, $P(X) = \{Z | Z \subseteq Y\}$.

Упорядоченные пары и n-ки элементов.

Для построения основных математических понятий первичным является понятие упорядоченной пары элементов. Нам нужно исходя только из теоретико-множественных свойств определить для каждой пары элементов X, Y множество, которое бы определяло упорядоченную пару $< X, Y >$, по которому мы могли бы восстановить эти два элемента и какой из них является первым в списке , а какой второй.

Мы назовем множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ *упорядоченной парой*, где элемент x - первый, а y - второй. Будем обозначать это множество через $\langle x, y \rangle$. Заметим, что свойство множества X быть упорядоченной парой $\langle x, y \rangle$ является теоретико-множественным и определяется следующим свойством: $(\exists A)(\exists B)((A \in X \wedge B \in X) \wedge ((x \in A) \wedge (\forall z)(z \in A \Rightarrow z = x)) \wedge (x \in B \wedge y \in B \wedge (\forall z)(z \in B \Rightarrow (z = x \vee z = y))))$.

Это определение "множество X равно упорядоченной паре $\langle x, y \rangle$"будем сокращенно записывать в виде "$X = \langle x, y \rangle$"

Предложение 1. Верна следующая эквивалентность $\langle x, y \rangle = \langle a, b \rangle \Leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$.

Докажем наше утверждение слева направо ($\Leftarrow$), то есть достаточность. Если $x = a \wedge y = b$, то очевидно, что $\{x\} = \{a\}$,$\{x, y\} = \{a, b\}$ и $\langle x, y\rangle \leftrightharpoons \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \langle a, b\rangle$.

Докажем теперь наше утверждение слева направо($\Rightarrow$), то есть необходимость. Итак мы хотим доказать, что если $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$, то $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Если рассмотрим множество $\{x\}$ в первой части, то в силу аксиомы равнообъемности возможны 2 варианта:

1. $\{x\} = \{a\}$.
2. $\{x\} = \{a, b\}$.

Рассмотрим первый случай.

1) Пусть $\{x\} = \{a\}$. Тогда по аксиоме равнообъемности $x = a$, и, следовательно выполнена одна из следующих возможностей уже для второго элемента из $\langle x, y\rangle$.

(1.1.) $\{x, y\} = \{a\}$ или

(1.2.) $\{x, y\} = \{a, b\}$.

Если выполнен случай (1.1), то по аксиоме равнообъемности $x = y = a$. Отсюда следует, что множество $\langle x, y\rangle$ состоит из 1 элемента и, следовательно, $\{a, b\} = \{x\}$. Отсюда по аксиоме равнообъемности $x = a$ и $x = b$,, но тогда $x = a = y = b$.

Если выполнен случай (1.2), то $y \neq x$ или $y = x$. Случай $y = x$ сводится к (1.1). А из $y \neq x$ следует, что $\{x, y\} \neq \{a\}$, тогда $\{x, y\} = \{a, b\}$, но из $\{x\} = \{a\}$ следует $\{y\} \neq \{a\}$, значит $x = a$ и $y = b$.

Рассмотрим теперь оставшийся случай.

2) $\{x\} = \{a, b\}$.

Но если $\{x\} = \{a, b\}$, следовательно, симметрично случаю (1.1.) получаем $a = b = x$ и $x = y = a = b$.

Доказанное предложение показывает, что определенное выше по паре элементов множество действительно кодирует всю требуемую информацию об упорядоченной паре, причем эта информация извлекается основываясь только на теоретико-множественных его свойствах.

Определим теперь понятие упорядоченной n-ки множеств при $n \geq 2$ о индукции. Для $n = 2$ мы уже имеем это понятие. Пусть для наборов из $n \geq 2$ элементов $a_1, ..., a_n$ мы имеем это определение упорядоченной n-ки. Определим теперь упорядоченный набор для элементов $a_1, ..., a_n, a_{n+1}$, взяв для набора элементов $a_1, ..., a_n$ соответствующую упорядоченную n-ку $< a_1, ..., a_n >$ положив в качестве упорядоченного набора $< a_1, ..., a_n, a_{n+1} >$ из элементов $a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ упорядоченную пару $<< a_1, ..., a_n >, a_{n+1} >$. Из предложения 1 мы получаем основное свойство упорядоченных наборов.

Следствие. $< a_1, ..., a_n >=< a_1, ..., a_n >\Leftrightarrow a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$

Декартово произведение.

Основываясь на понятии упорядоченной пару мы можем определить *декартово произведение двух множеств.*

Рассмотрим два множества A, B. Определим теперь *декартово произведение* как множество $A \times B$ в виде $\{\langle x, y\rangle \mid x \in A, \, y \in B\}$. Заметим теперь, что такое множество всегда существует в нашем универсуме. Это следует из аксиомы выделения и аксиомы степени. Если $x \in A$ и $y \in B$, тогда

$$\{x\} \subseteq A, \, \{x, y\} \subseteq (A \cup B)$$

и

$$\{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B), \, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

Следовательно, $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Но в таком случае нам нужно выделить в множестве $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ упорядоченные пары, в которых первый элемент взят из A, а второй из B. Но в таком случае дважды применив аксиому степени мы получаем наличие в нашем универсуме множества $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. А после этого, применяя аксиомы выделения и равнообъемности, легко получаем, что

$A \times B = \{Z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) | (\exists x)(\exists y)(x \in A \wedge y \in B \wedge "Z = \langle x, y \langle ")$ и существование нашего множества.

Теперь по индукции мы можем определить легко декартовы произведения не только пары множеств, но и произвольных n множеств $A_1, ..., A_n$, полагая $A_1 \times ... \times A_n \times A_{n+1} \rightleftharpoons (A_1 \times ... \times A_n) \times A_{n+1}$. Мы введем также сокращенную запись для декартовой степени A^n состоящего из всех упорядоченных наборов из n элементов множества A. Мы считаем, что $A^1 = A$.

Любое подмножество P в множестве A^n будем называть n-местным отношением на множестве A. Любое подмножество P в множестве $A_1 \times ... \times A_n$ будем называть отношением на множествах $A_1, ..., A_n$.

Функции на множествах.

Одно из базисных понятий в современной математике понятие функции. В рамках теоретико-множественных понятий мы можем теперь дать математически точное понятие функции.

Пусть даны множества A и B. **Функцией** f из A в B назовем подмножество $f \subseteq A \times B$, для которого выполнены следующие два условия:

1) $\forall x \in A \ \exists y \in B \mid \langle x, y \rangle \in f$.

2) $\forall x, y_1, y_2$, если $\langle x, y_1 \rangle \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Нетрудно понять, что мы определяем понятие функции через задание ее графика. Первое свойство гарантирует, что для любой точки из A пределен образ. Мы будем называть в этом случае множество областью определения функции f и обозначать $Dom(f)$. Из второго условия мы получаем, что в каждом сечении по x есть только одна точка. Будем обозначать единственную точку y для x такую, что $\langle x, y \rangle \in f$ через $f(x)$. Для подмножеств $X \subseteq A$ и $Y \subseteq B$ обозначим через $f(X)$ множество $\{y | (\exists x)(\langle x, y \rangle \in f$и $x \in X)\}$ и через $f^{-1}(Y)$ множество $\{x | (\exists y)(\langle x, y \rangle \in f$и $y \in Y)\}$. Ясно, что $f(X) \subseteq B$ и $f^{-1}(Y) \subseteq A$ и будем их называть, соответственно, f–образом множества X и f–прообразом множества

Y. Множество $f(A)$ будем называть областью значений функции f обозначать через $Range(f)$.

Прежде всего заметим, что для любой функции f из A в B и подмножеств $X_1 \subseteq A$ и $X_2 \subseteq A$ выполнено равенство

$$f(X_1) \cup f(X_2) = f(X_1 \cup X_2),$$

,а для подмножеств $Y_1 \subseteq B$ и $Y_2 \subseteq B$ выполнены равенства

$$f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$$

и

$$f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$$

. Это легко следует непосредственной проверкой на основании аксиомы равнообъемности.

В то же время выполнено всегда включение

$$f(X_1) \cap f(X_2) \supseteq f(X_1 \cap X_2),$$

но обратное включение выполняется не всегда. Мы можем рассмотреть функцию на всем множестве равную одному значению b и рассмотреть два множества непустых, но без общих точек, то есть $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Тогда $(f(X_1) \cap f(X_2) = f(X_1) = f(X_2)) = \{b\} \neq \emptyset$, но $f(X_1) \cup f(X_2) = \emptyset$. Следовательно равенство не выполняется.

Мы будем называть функцию f из A в B разнозначной или инъективной, если для любых различных элементов $a \neq b$ из A значения на них также различны $f(a) \neq f(b)$. Нетрудно проверить, что функция f из A в B разнозначна, если и только если для любых подмножеств $X_1 \subseteq A$ и $X_2 \subseteq A$ выполнено равенство

$$f(X_1) \cap f(X_2) \supseteq f(X_1 \cap X_2).$$

Мы будем называть функцию f из A в B отображением из A на B или сюръективной, если для любого элемента b из B существует элемент a b A такой, что $f(a) = b$. Функция f из A в B называется взаимнооднозначным отображением A

на B, если она разнозначна и является отображением A на B. Ясно, что разнозначная функция взаимнооднозначно отображает свою область определения на область значений. Если функция f взаимнооднозначно отображает множество A на B, то множество $f^{-1} \rightleftharpoons \{\langle y,x\rangle | \langle x,y\rangle \in f\}$ отображает взамнооднозначно множество B на A и $f(f^{-1}(b)) = b$ для любого элемента $b \in B$, а $f^{-1}(f(a)) = a$ для любого элемента $a \in A$.

Если f функция из A в B, а g функция из B в C, то определим подмножество $f \circ g \subseteq A \times C$, положив $f \circ g \rightleftharpoons \{\langle x,z\rangle | (\exists y \in B)(\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle y,z\rangle \in g\}$. Простая проверка показывает, что $f \circ g$ является функцией из A в C. Эта функция будет разнозначной, если функции f и g были разнозначны.

По определению множество непусто, если существует элемент, принадлежащий этому множеству. Но когда мы рассматриваем не одно множество, а некоторую совокупность непустых множеств, то естественно возникает вопрос о выборе в каждом множестве из этой совокупности какого-либо элемента, то есть вопрос о существовании функции из множества множеств в их объединение, сопоставляющей каждому множеству из этой совокупности элемент из этого множества.

Вопрос о существовании такой функции для конечных множеств решается положительно, но в случае бесконечных множеств это уже нетривиальная проблема. Решение ее зависит от того какие базовые аксиомы мы накладываем на наш универсум. Заметим только, что без нее невозможно доказать, что объединение счетного множества счетных множеств будет счетно. В тоже время при условии существования таких функций выбора можно доказать, как мы покажем позднее, что для любых бесконечных множеств мощность самого множества совпадает с мощностью его квадрата. Мы не будем требовать существования таких функций. Эта аксиома выбора будет проанализирована позднее с точки зрения ее связи с другими теоретико-множественными принципами.

Другое важное свойство уже необходимое в самых различных конструкциях связано с аксиомой подстановки: Если мы выбрали в нашем универсуме множество A и определили некоторое теоретико-множественное свойство $\varphi(x,y)$ такое, что для любого элемента a из множества A существует в нашем универсуме единственный элемент b такой, что выполнено свойство $\varphi(a,b)$, то существует в универсуме множество B, содержащее все такие элементы, то есть любой b такой, что найдется элемент a в A, что выполнено свойство $\varphi(a,b)$, лежит в B.

Частичные порядки и частично упорядоченные множества.

Наряду с понятием функции важными конструкциями в математики являются частичные и линейные порядки, а также отношения эквивалентности и фактор-множества. Введем также основываясь на теоретико-множественной точке зрения эти понятия.

Пусть A некоторое непустое множество. Бинарным отношением на множестве A будем называть любое подмножество $Q \subseteq A \times A$. Аналогично, n-арным отношением на множестве A, будем называть подмножество $Q \subseteq A^n$.

Бинарное отношение $P \subseteq A \times A$ на множестве A называется частичным порядком на A, если выполнены следующие свойства:

1. Рефлексивность: $\forall x \in A\, \langle x,x\rangle \in P$.

2. Антисимметричность: $\forall x,y \in A$, если

$$\langle x,y\rangle \in P \,\&\langle y,x\rangle \in P \Rightarrow x = y.$$

3. Транзитивность: $\forall x,y,z \in A$, если

$$\langle x,y\rangle \in P \,\&\langle y,z\rangle \in P \Rightarrow \langle x,z\rangle \in P.$$

Пример 1. Рассмотрим множество подмножеств $\mathcal{P}(A)$ множества A и бинарное отношение включения $\theta_{\subseteq} \rightleftharpoons \{\langle X,Y\rangle | X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(A) \wedge "X \subseteq Y"\}$. Так мы определяем отношение включения на множестве подмножеств, которое конечно же является частичным порядком.

Пример 2. Рассмотрим множество натуральных чисел $N \rightleftharpoons \{0,1,2,3,...,n,n+1,...\}$. Определим отношение делимости $\theta_{\text{"делит}} \rightleftharpoons \{\langle a,b\rangle | (\exists k)(b = ka)\}$. Легко проверить, что это отношение является частичным порядком на множестве натуральных чисел. Мы позднее построим в нашей теории множеств понятие натурального числа и определим множество натуральных чисел в нашем универсуме, но для этого нам потребуются дополнительные условия на наш универсум.

Бинарное отношение $P \subseteq A \times A$ на множестве A называется частичным предпорядком на A, если выполнены следующие свойства:

1. Рефлексивность: $\forall x \in A \, \langle x, x \rangle \in P$.

2. Транзитивность: $\forall x, y, z \in A$, если
$$\langle x, y \rangle \in P \,\&\, \langle y, z \rangle \in P \Rightarrow \langle x, z \rangle \in P.$$

Если P частичный предпорядок на множестве A, то часто вместо $\langle x, y \rangle \in P$ будем использовать более привычное математическое обозначение $x \leq_P y$. Ясно, что любой частичный порядок является частичным предпорядком.

Если бинарное отношение P является частичным порядком на A, то назовем пару $\langle A, P \rangle$ частично упорядоченным множеством. Часто мы будем его записывать в виде $\langle A, \leq_P \rangle$ либо просто $\langle A, \leq \rangle$. Частично упорядоченное множество $\langle A, P \rangle$ называется линейно упорядоченным множеством, если выполнено условие сравнимости: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\langle a, b \rangle \in P \vee \langle b, a \rangle \in P)$.

Бинарное отношение $\theta \subseteq A \times A$ на множестве A называется отношением эквивалентности на A, если выполнены следующие свойства:

1. Рефлексивность: $\forall x \in A \, \langle x, x \rangle \in \theta$.

2. Симметричность: $\forall x, y \in A$, если
$$\langle x, y \rangle \in \theta \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \theta.$$

3. Транзитивность: $\forall x, y, z \in A$, если
$$\langle x, y \rangle \in \theta \,\&\, \langle y, z \rangle \in \theta \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \theta.$$

Если бинарное отношение $\theta \subseteq A \times A$ на множестве A является отношением эквивалентности на A, то для любого элемента a из A определим смежный класс

$a/\theta \rightleftharpoons \{b \,|\, b \in A \text{ и } \langle a, b\rangle \in \theta$. Мы здесь и в дальнейшем используем символ $\rightleftharpoons$ для указания того, что мы определяем левую часть равной правой по определению. Заметим, что для любых элементов $a, b \in A$ пересечение смежных классов $a/\theta \cap b/\theta$ не пусто, если и только если $\langle a, b\rangle \in \theta$. Таким образом, отношение эквивалентности на множестве A задает разбиение этого множества на непересекающиеся множества смежных классов, состоящих из попарно эквивалентных элементов. Теперь мы можем определить в множестве подмножеств $\mathcal{P}(A)$ множества A подмножество, состоящее из всех смежных классов на A по отношению эквивалентности θ и будем его обозначать A/θ и называть фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности θ. Ясно, что $A/\theta = \{a/\theta | a \in A\}$. Как легко видеть, мы показали, что для любого множества и отношения эквивалентности на нем из нашего универсума фактор-множество также принадлежит нашему универсуму.

Если P частичный предпорядок на множестве A, то определим новое бинарное отношение $\theta(P) \rightleftharpoons \{\langle x, y\rangle \in A^2 | \langle x, y\rangle \in P \text{и} \langle x, x\rangle \in P\}$. Легко видеть, что отношение $\theta(P)$ является отношением эквивалентности на множестве A. Рассмотрим теперь фактор-множество $A/\theta(P)$. Определим теперь на этом фактор-множестве бинарное отношение $P_\theta \rightleftharpoons \{\langle x/\theta, y/\theta\rangle \langle x, y\rangle \in P\}$. Легко проверить непосредственно, что это бинарное отношение является уже частичным порядком. Будем его называть частичным порядком, индуцированным предпорядком P. Это стандартная конструкция склеивания эквивалентных элементов относительно предпорядка таким образом, что в результате склеивания мы уже получаем на смежных классах частичный порядок. А отношение эквивалентности $\theta(P)$ при этом является наименьшим отношением эквивалентности на A таким, что отношение P определяет уже на фактор-множестве A/θ частичный порядок.

Верхние и нижние грани. Точные грани. Наименьший и наибольший элементы.

Пусть A — множество, а P — частичный порядок на A, $\langle A, P\rangle$ — частично–упорядоченное множество (ч.у.м). Рассмотрим произвольное подмножество X в множестве A.

Элемент a называется наибольшим (наименьшим) в подмножестве X ч.у.м. $\langle A, P\rangle$, если $a \in X$ и $(\forall y \in X) y \leq_p a$ ($a \in X$ и $(\forall y \in X)$, $a \leq_p y$).

Элемент a называется максимальным (минимальным) в подмножестве X ч.у.м. $\langle A, P\rangle$, если $a \in X$ и $(\forall y \in X)(a \leq_p y \Rightarrow y = a)$ ($a \in X$ и $\forall y \in X$, $y \leq_p a \Rightarrow y = a$).

Пример 3. Рассмотрим в множестве подмножеств$\mathcal{P}(N)$ натуральных чисел с отношением включения подмножество X, состоящее из множеств $\{0,1\}, \{0,2\}, \{0\}$. Тогда $\{0\}$ — наименьший и минимальный элемент в X, а элементы $\{0,1\}$ и $\{0,2\}$ — максимальные в X.

Элемент a называется верхней (нижней) гранью для подмножества X ч.у.м. $\langle A, P\rangle$, если $a \in A$ и $(\forall y \in X)(y \leq_P a)$ ($a \in A$ и $(\forall y \in X)$, $(a \leq_P y)$).

Элемент a называется точной верхней (нижней) гранью для подмножества X ч.у.м. $\langle A, P\rangle$ если $a \in A$ и является наименьшим (наибольшим) элементов среди верхних (нижних) граней для подмножества X ч.у.м. $\langle A, P\rangle$. Мы будем обозначать точную верхнюю (нижнюю) грань для подмножества X ч.у.м. $\langle A, P\rangle$ через $sup(X)$ или $sup_{\langle A,P\rangle}(X)$ $(inf(X)$ или $inf_{\langle A,P\rangle}(X))$.

Легко заметить, что в любом конечном частично упорядоченном множестве всегда есть максимальный элемент. В бесконечных же множествах, например в множестве натуральных чисел с естественным порядком, максимальных элементов может и не быть.

Частично упорядоченное множество $\langle A, P\rangle$ называется **индуктивным**, если для любого его линейно упорядоченного подмножества есть верхняя грань.

На основе Аксиомы выбора, как мы докажем позднее, можно доказать следующее полезное утверждение.

Лемма Цорна. В любом индуктивном частично упорядоченном множестве существует максимальный элемент.

Более того, при рассмотрении аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля мы докажем, что она эквивалентна Аксиоме выбора.

L 3

Лекция 3. Натуральные числа и ординалы.

В этой лекции мы начнем построение натуральных чисел в нашем универсуме и множества натуральных чисел, а также множества ординалов, как бесконечного аналога натуральных чисел и трансфинитной индукции.

Как было замечено ранее мы имеем для нашего универсума аксиому Существования:

1. :Существует множество $\oslash$, которое не содержит ни одного элемента.

   Основываясь на этой аксиоме, аксиомах пары и объединения мы можем легко определить следующую последовательность множеств, определяя для каждого натурального числа из метатеории соответствующее множество. Это и будут натуральные числа в нашей теории множеств.

   Полагаем, $\underline{0} \rightleftharpoons \oslash$, $\underline{1} \rightleftharpoons \underline{0} \cup \{\underline{0}\} = \{\oslash\}$, ясно, что $|\underline{0}| < |\underline{1}|$, где множество $\underline{1}$ состоит в точности из одного элемента $\underline{0} \in \underline{1}$, но $\underline{1} \notin \underline{1}$. Мы можем продолжить аналогичную конструкцию и дальше.

   Пусть $\underline{n}$ определено, $\underline{n+1} \rightleftharpoons \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$, а из $\underline{n} \notin \underline{n}$ следует, что $\underline{n+1} \notin \underline{n+1}$ и $\underline{n} \in \underline{n+1}$.

   Образовалась последовательность: $\underline{0} \in \underline{1} \in \underline{2} \in \underline{3} \in \ \ldots$, т. е., начиная с пустого множества $\oslash$, мы определили элементы в нашем универсуме, определяющие в нем натуральные числа. Нам будет нужно показать в дальнейшем, что они позволяют действительно использовать их при построениях в соответствии с нашими интуитивными представлениями о натуральных числах.

   Следующий вопрос, который нас волнует, а есть ли в нашем универсуме множество, состоящее из всех натуральных чисел. Действительно, если мы не примем дополнительных условий на наш универсум, то доказать существование такого множества мы не сможем. И такие финитарные системы теории множеств также исследуются в математики. Но мы хотим построить основу для математики, в которой бы сохранялись основные конструкции классической математики и основные теоремы, которые позволяют с успехом решать наряду с математическими проблемами и прикладные задачи, что однако не приводит к ошибкам. А если они и появляются, то виной тому не математические методы, а некорректно построенные модели явлений, которые не учитывают каких-либо важных факторов, либо виной тому ошибки в рассуждениях конкретного исследователя.

Введем теперь абстрактный аналог натуральных чисел ординалы (порядковые числа), распространяющие свойства натуральных чисел, позволяющие осуществлять индуктивные построения не только на счетных множествах, но и на множествах большей мощности.

Определение. Ординалом мы будем называть любое множество X, удовлетворяющее следующим двум свойствам:

1. $(\forall Y \in X) Y \subseteq X$ (все элементы элементов являются элементами).
2. $(\forall x \in X)(\forall y \in X)(x \neq y \Rightarrow (x \in y \vee y \in x))$ (сравнимость по принадлежности).

Нетрудно видеть из определения натуральных чисел в нашем универсуме, что определенные нами множества $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \ldots, \underline{n}, \ldots$ являются ординалами.

Заметим также еще пару простейших свойств ординалов:

1. Если α ординал и $\beta \in \alpha$,то β тоже ординал (все элементы ординалов являются ординалами).
2. Если α ординал и $\beta \rightleftharpoons \alpha \cup \{\alpha\}$,то β тоже ординал и $\alpha \in \beta$.

Для изучения свойств ординалов и правил работы с ними введем понятие вполне упорядоченных множеств и изучим их свойства.

Вполне упорядоченные множества.

Пусть A–множество, $P \subseteq A \times A$ — частичный порядок на этом множестве. Частичный порядок P на множестве A называется линейным порядком на A, если $(\forall x, y \in A)$ $(x \leq_P \vee y \leq_P x)$ (т.е. любые два элемента сравнимы между собой).

Определение. Линейно упорядоченное множество (л.у.м.) $\langle A, \leq_P \rangle$ называется вполне упорядоченным (в.у.м.), если в любом непустом подмножестве $X \subseteq A$ множества A в этом подмножестве X существует наименьший элемент $x_0 \in X$.

Рассмотрим некоторые примеры линейноупорядоченных множеств.

Пример 1. Множество натуральных чисел с естественным порядком $(N, \leq)$ является вполне упорядоченное множеством.

Пример 2. Допустим, что ω множество $\{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \ldots, \underline{n}, \ldots\}$ натуральных чисел, определенных в нашем универсуме. Определим бинарное отношение $P \rightleftharpoons \{\langle x, y \rangle \in \omega^2 | x = y \vee x \in y\}$.В таком случае пара $\langle \omega, \leq_P \rangle$ является вполне упорядоченным множеством.

Пример 3. Множество вещественных чисел на отрезке $([0,1]$ с естественным порядком $\langle [0,1], \leq \rangle$ — не является вполне упорядоченным множеством.

Пример 4. Рассмотрим множество пар натуральных чисел с лексикографическим порядком $\langle N^2, \leq_{lex} \rangle$, где лексикографический порядок $\leq_{lex}$ определен как в словаре сравниваются слова. Тогда нетрудно проверить, что $\langle N^2, \leq_{lex} \rangle$ вполне упорядоченное множество, так как для любого непустого подмножества X мы можем выбрать наименьший элемент, взяв вначале наименьшую первую координату у элементов из этого множества X, а затем среди элементов из X с наименьшей первой координатой выбрать наименьшую вторую координату. Таким образом найденная пара и будет наименьшим элементом в X. Аналогично мы можем определить лексикографический порядок на любой декартовой степени $\langle N^n, \leq_{lex}\rangle$ и это также будет вполне упорядоченным множеством.

Пример 5. Рассмотрим множество $N^{<\infty} \rightleftharpoons N \cup N^2 \cup N^3 \cup ... \cup N^n \cup ...$ и определим на этом множестве всех конечных упорядоченных наборов натуральных чисел и лексикографический порядок на них как в словаре, где для наборов ищется первая координата, где наборы различаются и то из них больше у которого соответствующее натуральное число больше, а если одна из последовательностей является начальным куском второй, то она меньше. Обозначим такой порядок через $\leq_{lex}$. Это отношение будет линейным порядком на $N^{<\infty}$, но пара $\langle N^n, \leq_{lex}\rangle$ не будет вполнеупорядоченным множеством, так как в множестве $\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,0,1\rangle, \langle 0,0,0,1\rangle, ..., \langle 0,0,...,0,1\rangle, ...\}$ нет наименьшего элемента.

Пример 6. Рассмотрим вновь множество $N^{<\infty} \rightleftharpoons N \cup N^2 \cup N^3 \cup ... \cup N^n \cup ...$ и определим на этом множестве всех конечных упорядоченных наборов натуральных чисел и новый порядок — почти лексикографический, где вначале мы сравниваем наборы по длине, и больше набор с большей длиной, а если длины наборов одинаковые, то сравниваем наборы относительно лексикографического порядка. Обозначим такой порядок через $\leq^*_{lex}$. Это отношение будет не только линейным порядком на $N^{<\infty}$, но пара $\langle N^n, \leq^*_{lex}\rangle$ будет вполнеупорядоченным множеством.

Однако не любое множество можно легко вполнеупорядочить. Так построить на множестве вещественных чисел какое-либо вполнеупорядочение не удается. Если же мы принимаем Аксиому выбора, то можно доказать

Теорема Цермело. Любое множество можно вполнеупорядочить.

Без аксиомы выбора мы ее не можем доказать и, как будет показано позднее, теорема Цермело эквивалентна Аксиоме выбора.

Изоморфизма вполне упорядоченных множеств.

Вполне упорядоченное множество обладают довольно сильными ограничениями на автоморфизмы и изоморфные вложения. Это и делает их важным инструментом для конструкций на абстрактных множествах.

Пусть $\langle A, \leq_P \rangle$ и $\langle B, \leq_Q \rangle$ — два частично упорядоченных множества.

Определение. Частично упорядоченные множества $\langle A, \leq_P \rangle$ и

$\langle B, \leq_Q \rangle$ изоморфны, если существует функция $f\colon A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$ такая, что $(\forall x, y)(x \leq_P Y \to f(x) \leq_Q f(y))$. Будем называть в этом случае функцию f изоморфизмом ч.у.м. $\langle A, \leq_P \rangle$ на $\langle B, \leq_Q \rangle$ и обозначать

$f\colon \langle A, \leq_P \rangle \cong \langle B, \leq_Q \rangle$.

Определение. Будем говорить, что функция $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$ сохраняет порядок, если $(\forall x, y)$ $(x \leq_P y \to f(x) \leq_P f(y))$. Будем обозначать такое вложение через $f\colon \langle A, \leq_P \rangle \to \langle B, \leq_Q \rangle$

Определение. Будем говорить, что функция $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$ изоморфно вкладывает $\langle A, \leq_P \rangle$ в $\langle B, \leq_Q \rangle$, если $(\forall x, y)$ $(x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y))$ и обозначать $f\colon \langle A, \leq_P \rangle \xrightarrow[\text{в}]{1-1} \langle B, \leq_Q \rangle$

Предложение о монотонных функциях. Если $f\colon \langle A, \leq_P \rangle \to \langle A, \leq_P \rangle$ разнозначное и сохраняет порядок,а множество $\langle A, \leq_P \rangle$ является вполне упорядоченным, то выполняется неравенство $(\forall x \in A)$ $x \leq_P f(x)$.

Доказательство. Допустим, что это не так. Значит, $\{x \in A \mid x \nleq_P f(x)\} \neq \varnothing$. Тогда это подмножество множества A, а $\langle A, \leq_P \rangle$ вполне упорядочено и, следовательно, существует наименьший элемент x_0 в множестве $\{x \in A \mid x \nleq_P f(x)\}$.

Из линейной упорядоченности следует, что выполнено условие $f(x_0) \leq_P x_0$ или $x_0 \leq_P f(x_0)$, но $x_0 \nleq f(x_0)$. Отсюда $f(x_0) <_P x_0$. Из условия на функцию f получаем неравенство $f(f(x_0)) <_P f(x_0)$. Значит, для $y = f(x_0)$ выполнено $f(y) <_P y$, значит, $y \in \{x \mid x \nleq_P f(x)\}$. И так мы нашли элемент меньший наименьшего и получаем противоречие, т. к. он так же лежит в этом множестве. Значит, предложение доказано от противного.

Рассмотрим вполне упорядоченное множество $\langle A, \leq_P \rangle$ и типы изоморфизмов его начальных отрезков. Для элемента $a \in A$ определим множество $\hat{a} = \{y \in A \mid y <_P a\}$. Обычно, подмножество линейно упорядоченного множества, содержащее вместе с любым элементом и все меньшие него, называется начальным сегментом. И определенное нами множество $\hat{a}$ очевидно является начальным сегментом. Если X подмножество множества A, то мы можем индуцировать на нем порядок $\leq_{P \restriction X}$, полученный из частичного порядка P на A и равный $P \cap X^2$. Частично упорядоченное множество X с этим индуцированным порядком будем обозначать через $\langle X, \leq_P \rangle$, а сам порядок через $\leq_P$ вместо $\leq_{P \restriction X}$. Мы можем на $\hat{x}$ индуцировать теперь порядок из $\langle A, \leq_P \rangle$ и будем обозначать его как упорядоченное множество через $\langle \hat{x}, \leq_P \rangle$ или просто $\hat{\mathbf{x}}$.

Может ли начальный сегмент множества (вполне упорядоченного) быть изоморфен всему множеству. Легко видеть, что это невозможно для конечных множеств. Для множества рациональных чисел с естественным порядком это уже не так. Оно изоморфно любому своему начальному сегменту без наибольшего элемента в нем. Следующее следствие показывает, что вполне упорядоченные множества в этом отношении похожи на конечные множества. Это сразу следует из предложения о монотонных функциях на вполне упорядоченных множествах.

Следствие 1.Для любого элемента x вполне упорядоченного множества $\langle A, \leq_P \rangle$ собственный начальный сегмент не изоморфен всему множеству, то есть $\langle \hat{x}, \leq_P \rangle \not\cong \langle A, \leq_P \rangle$.

Более того, для разных точек мы получаем разные типы изоморфизма начальных сегментов.

Следствие 2. Если $\langle A, \leq_P \rangle$ — вполне упорядоченное множество, то начальные сегменты, определенные разными элементами не изоморфны, то есть

$(\forall z, x) x \neq z \Longrightarrow \langle \hat{x}, \leq_P \rangle \ncong \langle \hat{z}, \leq_P \rangle$.

Принцип трансфинитной индукции.

В арифметики и всей математике один из важнейших принципов, лежащий в основе многих конструкций, это математическая индукция. При работе с абстрактными множествами аналогом математической индукции и призваны служить вполне упорядоченные множества и ординалы. Принцип математической индукции мы можем сформулировать в двух видах. Первый в более распространенной форме *"Если свойство Q выполнено для нуля (базис индукции) и из выполнимости свойства Q на натуральном числе n следует его выполнимость на следующем натуральном числе $n+1$(шаг индукции), то свойство Q справедливо для всех натуральных чисел"*. Более неформальное разъяснение этого принципа формулируется в виде "Если первая в очереди женщина и за каждой женщиной стоит женщина, то в очереди все женщины". В формульном виде это можно записать в виде "$((Q(0) \wedge (\forall n)(Q(n) \Rightarrow Q(n+1))) \Longrightarrow (\forall n) Q(n))$". Вторая форма этого принципа, эквивалентная первой, формулируется в виде *"Если для свойства Q справедливо индуктивное условие: Для любого натурального числа n из выполнимости свойства Q на всех натуральных числах меньших n, следует выполнимость свойства Q и для n, тогда свойство Q выполнено для всех натуральных чисел"*. В формульном виде это можно записать в виде "$((\forall m < n) Q(m)) \Longrightarrow (\forall n) Q(n))$".

Предложение о трансфинитной индукции. Если $\langle A, \leq_P \rangle$ вполне упорядочено и $Q \subseteq A$ такое, что $(\forall x \in A)$ $((\hat{x} \subseteq Q) \rightarrow x \in Q)$, тогда $A = Q$.

Доказательство. Докажем наше утверждение от противного. Допустим, что $A \neq Q$, тогда из $A \setminus Q \neq \oslash$ следует, что существует наименьший элемент x_0 в этом непустом множестве $A \setminus Q$. Рассмотрим этот наименьший контрпример к нашему предложению и определим для него начальный сегмент $\hat{x}_0$, но из условия минимальности следует включение $\hat{x}_0 \subseteq Q$, но тогда по индукционному условию на Q, мы заключаем, что $x_0 \in Q$. Но по выбору элемента x_0 известно, что $x_0 \in A \setminus Q$ и, следовательно, $x_0 \notin Q$. Полученное противоречие, доказывает, что наше предположение неверно и предложение справедливо.

Для работы с ординалами и их изучение на основе вполне упорядоченных множеств мы потребуем выполнимости в нашем универсуме еще одной аксиомы, которая в частности показывает, что не существует множества всех множеств. Это так называемая аксиома регулярности или аксиома фундируемости.

Аксиома фундируемости(регулярности): $(\forall x)(x \neq \oslash) \Rightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \oslash)$.

Отсюда сразу следует, что не существует множества, являющегося элементом самого себя, то есть элементов $x \in x$. Таким образом справедливо свойство $(\forall x) x \notin x$. Отсюда сразу же следует, что нет и множества всех множеств. Прямо из аксиомы фундируемости следует, что не существует бесконечной последовательности $\{x_n | n --- \text{натуральное число}\}$ с условиями:

$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots \ni x_n \ni \ldots$.

Докажем теперь базисные свойства ординалов, которые показывают, что ординалы служат для продолжения конструкций с использованием натуральных чисел на бесконечные множества.

Как мы ранее уже определили, множество α является ординалом, если α — транзитивное множество и все его элементы также транзитивны. А множество A называется транзитивным, если $(\forall X \in \alpha)(\forall y)(y \in X) \Rightarrow (y \in \alpha)$. Мы будем свойство быть ординалом обозначать через $Ord(\alpha)$ или $\alpha \in Ord$.

Докажем теперь основные свойства ординалов, которые и позволяют называть их порядковыми числами и использовать в теоретико-множественных конструкциях, как естественное обобщение натуральных чисел.

Рассмотрим произвольный непустой ординал α. Определим на нем бинарное отношение $x \leq_\alpha y$ следующим образом:

для элементов x, y из α полагаем $x \leq_\alpha y$, если $x = y$ или $x \in y$.

Заметим вначале, что это отношение определяет частичный порядок на ординале α. Это отношение на элементах множества будем называть порядком по принадлежности.

1. Рефлексивность $x{\leq_\alpha}x$.

2. Антисимметричность $x{\leq_\alpha}y \wedge y{\leq_\alpha}x \Rightarrow x = y$.

   Из определения отношения следует, что выполняется случай $x = y$ или случай $x \in y$ и $y \in x$. В первом случае мы получаем требуемое условие, а во втором случае заключаем, что $x \cap \{x, y\} \neq \oslash \wedge y \cap \{x, y\} \neq \oslash$. Но в этом случае для множества $\{x, y\}$ не выполняется аксиома фундируемости и, следовательно, этот случай не возможен.

3. Транзитивность: если $x{\leq_\alpha}y \wedge y \leq_\alpha z \Rightarrow x{\leq_\alpha}z$.

   Как и в предыдущем случае возможны два случая: случай 1 "$x = y$ или $y = z$"или случай 2 "$x \in y \in z$". Но в первом случае автоматически выполняется требуемое заключение $x{\leq_\alpha}z$. Во втором случае из транзитивности элементов ординала сразу же получаем, что либо $x \in z$ и следовательно $x{\leq_\alpha}z$.

Докажем теперь принцип трансфинитной индукции для ординалов, который будем часто называть ординальной индукцией.

Теорема об индукции на ординалах. Если $\varphi(x)$ теоретико-множественное свойство и индуктивное условие "для любого фиксированного ординала

α выполнено свойство $((\forall\gamma \in \alpha)\varphi(\gamma)) \Longrightarrow \varphi(\alpha)$", тогда теоретико - множественное свойство $\varphi(x)$ выполнено на любом ординале, то есть $(\forall\alpha \in \mathrm{Ord})\varphi(\alpha)$.

Докажем эту теорему от противного. Пусть α ординал, для которого не выполнено свойство $\varphi(x)$. Из индуктивного условия мы заключаем. что существует элемент $\gamma \in \alpha$ такой, что на нем не выполнено свойство $\varphi(x)$. По аксиоме выделения рассмотрим множество $\{\gamma \in \alpha|\neg\varphi(\gamma)\}$. По аксиоме фундируемости существует элемент $\gamma_0 \in \{\gamma \in \alpha|\neg\varphi(\gamma)\}$ такой, что $\gamma_0 \cap \{\beta \in \alpha|\neg\varphi(\gamma)\} = \emptyset$. В этом случае элемент $\gamma_0 \in \alpha$ является ординалом и все его элементы из транзитивности ординала α вляются элементами α. А из пустоты пересечения $\gamma_0 \cap \{\gamma \in \alpha|\neg\varphi(\gamma)\} = \emptyset$ следует, что все его элементы удовлетворяют в таком случае свойству $\varphi(x)$. Однако в этом случае из индуктивного условия для свойства $\varphi(x)$ заключаем, что и ординал γ_0 удовлетворяет свойству $\varphi(x)$, но это противоречит выбору элемента γ_0. Полученное противоречие показывает, что наше предположение ложно и теорема доказана.

Воспользуемся теперь индукцией для ординалов для доказательства сравнимости элементов ординала относительно порядка по принадлежности.

Теорема о сравнимости ординалов. Для любых ординалов α и β выполнено одно из условий: $\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим теоретико – множественное свойство (α, β) выражающее сравнимость ординалов "$\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$". Нам нужно доказать, что $(\forall\alpha \in Ord)(\forall\beta \in Ord)(\alpha, \beta)$. По теореме об ординальной индукции нам достаточно доказать, что условие индукции "$(\forall\alpha \in Ord)((\forall\gamma \in \alpha)\varphi(\gamma) \Longrightarrow \varphi(\alpha)$, где в качестве свойства $\varphi(x)$ мы рассматриваем свойство $(\forall\beta \in Ord)(x, \beta)$. Итак пусть выполнено предположение условия индукции $(\forall\alpha \in Ord)((\forall\gamma \in \alpha)(\forall\beta \in Ord)(\gamma, \beta)$. Требуется доказать, что в этом случае выполнено условие $(\forall\beta \in Ord)(\alpha, \beta)$. Для того чтобы доказать это условие снова воспользуемся принципом ординальной индукции. По теореме нам достаточно показать, что условие индукции "$(\forall \beta \in Ord)((\forall \gamma \in \beta)\varphi(\gamma) \implies \varphi(\beta)$, где в качестве свойства $\varphi(x)$ мы рассматриваем свойство (α, x).

Мы таким образом свели доказательство сравнимости ординалов к доказательству свойства (α, β) для ординалов α и β из двух предположений:

1. $((\forall \gamma \in \alpha)(\forall \beta \in Ord)(\gamma, \beta)$;
2. "$((\forall \gamma \in \beta)(\alpha, \gamma))$.

Заметим, что выполняется одна из следующих возможностей: $\alpha = \beta \vee \alpha \setminus \beta \neq \emptyset \vee \beta \setminus \alpha \neq \emptyset$.

Если $\alpha = \beta$, то условие сравнимости (α, β) очевидно выполнено.

Если выполнено условие $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$, то найдется элемент $\gamma \in \alpha$ такой, что $\gamma \notin \beta$. Но из первого индукционного предположения мы имеем для ординала γ сравнимость с любым ординалом и, следовательно, выполнено $\gamma = \beta$ или $\beta \in \gamma$. Но тогда мы имеем непосредственно из равенства или из транзитивности α, что $\beta \in \alpha$ и сравнимость доказана.

Если выполнена последняя возможность $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, то рассмотрим ординал $\gamma \in \beta$, который не лежит в α. Из второго индукционного предположения мы заключаем, что ординал γ сравним с ординалом α. Но по выбору этого ординала мы имеем только две возможности для сравнимости: $\gamma = \alpha$ или $\alpha \in \gamma$. Но как и во втором случае из равенства либо транзитивности β мы получаем, что в этом случае $\alpha \in \beta$ и сравнимость доказана. Теорема доказана.

Следствие о линейности Для любого ординала α частично упорядоченное множество $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ — линейно, то есть $(\forall x, y \in \alpha)(x = y \vee x \in y \vee y \in x)$.

Доказательство следует из теоремы и того, что элементы ординалов являются ординалами.

Теорема. Если α — ординал, то $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ является вполне упорядоченным множеством.

Доказательство. Мы доказали, что $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ — линейно упорядоченное множество. Покажем основное свойство существования наименьшего элемента в любом непустом подмножестве.

Рассмотрим произвольное непустое подмножество $X \subseteq \alpha$. Надо найти наименьший элемент. По аксиоме регулярности $(\exists y \in X)(y \cap X = \oslash)$. Докажем, что y наименьший в X относительно порядка $\leq_\alpha$. Выберем произвольный $a \in X \subseteq \alpha$. В силу линейности нашего порядка на ординалах выполняется одно из условий $a \in y \vee y \in a \vee y = a$. Но $a \notin y$, так как иначе $a \in y \cap X \neq \oslash$. Значит, $y \leq_\alpha a$ и y действительно является наименьшим в X. Теорема доказана.

Покажем теперь, что порядок по принадлежности на ординалах совпадает с отношением на вполне упорядоченных множествах.

Теорема. Если α и β ординалы и существует изоморфное вложение из $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ в $\langle \beta, \leq_\beta \rangle$, то $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$.

Доказательство. По теореме о сравнимости ординалов выполняется в точности одно из следующих условий: $\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$. Для доказательства нам достаточно заметить, что последняя возможность в нашем случае не выполняется. Действительно, если $\beta \in \alpha$, то выполнено включение $\beta \sqsubseteq \alpha$ и β — начальный сегмент в α, но в таком случае по теореме о монотонных функциях на вполне упорядоченных множествах элемент β при изоморфном вложении $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ в $\langle \beta, \leq_\beta \rangle$ должен перейти в элемент не меньший β, а по предположению он должен лежат в β. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 1. Если α и β ординалы и существует изоморфное вложение из $\alpha \subseteq \beta$, то $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$.

Следствие 2. Если α и β ординалы и существует изоморфное вложение из $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ на $\langle \beta, \leq_\beta \rangle$, то $\alpha = \beta$.

Для того, чтобы доказать следующее свойство вполнеупорядоченных множеств нам потребуется еще одна аксиома о нашем универсуме.

Аксиома подстановки. Если X множество, а $\psi(x, y)$ — некоторое теоретико - множественное свойство такое, что для любого x из X существует единственный элемент y из нашего универсума так, что для них выполнено данное свойство $\psi(x, y)$, тогда в нашем универсуме существует множество, состоящее в точности из всех элементов y для которых найдется элемент x из X такой, что выполнено данное свойство $\psi(x, y)$.

Теорема о каноническом вполне упорядоченном множестве. Если $\langle A, \leq_P \rangle$ — вполне упорядоченное множество, то существует ординал α такой, что вполне упорядоченные множества $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ и $\langle A, \leq_P \rangle$ изоморфны.

Доказательство. Рассмотрим начальные интервалы $\hat{\mathbf{a}} \rightleftharpoons \langle \hat{\mathbf{a}}, \leq_{\mathbf{P}} \rangle$ для элементов $a \in A$. Как было показано ранее они не изоморфны для различных элементов. Определим подмножество $A_0 \subseteq A$, соостоящее из тех элементов a из A, для которых найдется ординал α_a такой, что $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ и $\langle \hat{a}, \leq_P \rangle$ изоморфны. Причем если такой ординал существует, то он единственный в силу предыдущего следствия. Пусть $\psi(x, y)$ — формула, которая утверждает, что x — это элемент из A, а y — это ординал, причем начальный отрезок, определенный элементом x нашем вполне упорядоченном множестве и ординал с порядком по принадлежности изоморфны. В силу аксиомы подстановки ординалы α_a для $a \in A_0$ образуют некоторое множество α, состоящее из ординалов. Очевидно, что множество A_0 совпадает с A или является начальным отрезком в A. Это следует из того, что сужение любого изоморфизма на меньший начальный сегмент вновь будет изоморфизмом на ординал. Из тех же соображений следует, что любоq элемент ординала из α также лежит в α и, следовательно, α ординал. Заметим, что свойство $\psi(x, y)$ определяет функцию из A_0 на α, которая сохраняет порядок и разнозначна, то есть определяет изоморфизм. Если $A = A_0$, то мы нашли искомый ординал и изоморфизм. Случай же $A \neq A_0$ невозможен. Так как взяв наименьший элемент a из $A \setminus A_0$, мы получим, что $\hat{a} = A_0$. Отсюда мы получаем, что $a \in A_0$, но это противоречит выбору элемента a. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие о сравнимости для вполне упорядоченных множеств). Если $\langle A, \leq_A \rangle$, $\langle B, \leq_B \rangle$ два вполне упорядоченных множества, тогда выполняется в точности один из следующих случаев:

1. $\langle A, \leq_A \rangle \cong \langle B, \leq_B \rangle$.
2. $\exists b \in B : \langle A, \leq_A \rangle \cong \langle \hat{b}, \leq_B \rangle$.
3. $\exists a \in A : \langle \hat{a}, \leq_A \rangle \cong \langle B, \leq_B \rangle$.

Для построения в теории множеств множества натуральных чисел, а на их основе рациональных и вещественных нам потребуется наложить еще одно требование на наш универсум.

Аксиома бесконечности: $(\exists A)(\varnothing \in A \wedge (\forall x \in A)(x \cup \{x\} \in A)$.

Заметим, что для множества A из аксиомы бесконечности выполнены следующие свойства: $\underline{0} \in A$, $\underline{1} = \underline{0} \cup \{\underline{0}\} \in A$ и по индукции, если $\underline{n} \in A$, то $\underline{n+1} = \underline{n} \cup \underline{n}\} \in A$. **Операции на ординалах**

Ординалы — это аналог натуральных чисел для произвольных множеств. На ординалах мы можем построить ординальную арифметику. Для этого определим продолжение операций сложения, умножения и возведения в степень со множества натуральных чисел на ординалы.

I.Определим вначале операцию прибавления единицы для любого ординала α, положив $\alpha + 1 \leftrightharpoons \alpha \cup \{\alpha\}$.

Так как α ординал, то множество $\alpha+1$ состоит из транзитивных элементов. Покажем, что оно транзитивно. Пусть $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$, а $y \in x$. Если $x \in \alpha$, то так как $y \in x$ и α ординал, то $y \in \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$. Если же $x = \alpha$, то

$y \in \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$. Итак мы получили, что $\alpha + 1$ — транзитивно и, следовательно, $\alpha + 1$ ординал.

Предложение 1. Для любого ординала α множество $\alpha + 1$ определяет ординал такой, что $\alpha < \alpha + 1$ и для любого ординала γ, если $\alpha \leq \gamma \leq \alpha + 1$, то $\alpha = \gamma \vee \gamma = \alpha + 1$.

Доказательство. Покажем, что $\alpha + 1$ следующий за α ординал. По условию на ординал γ возможны два случая: $\alpha = \gamma$ или $\alpha \in \gamma$. Если $\alpha = \gamma$, то заключение предложения верно. Если же $\alpha \in \gamma$, то в силу транзитивности ординалов $\alpha \subseteq \gamma$ и $\gamma \supseteq \alpha + 1$. Из $\gamma \leq \alpha + 1$ получаем, что $\gamma = \alpha + 1$ или $(\gamma \in \alpha + 1)$. Если $\alpha + 1 = \gamma$, то заключение предложения верно. Если $\gamma \in \alpha + 1$, то из транзитивности $\gamma \in \gamma$. А это невозможно в силу аксиомы фундируемости.

Ординал α называется непредельным, если существует ординал γ такой, что $\alpha = \gamma + 1$. Ординал α называется предельным, если не существует ординала γ такого, что $\alpha = \gamma + 1$. Определив прибавление единицы, мы можем рассмотреть и прибавление n–единиц $\alpha + n$ для любого ординала α, где $\alpha + 0 = \alpha$.

Мы хотим построить теперь ординал, который бы содержал все конечные ординалы и был наименьшим с таким свойством. Это и будет искомый ординал ω.

Рассмотрим теперь множество ординалов α, состоящее из таких ординалов β из A, что ординал β и все его элементы являются предельными ординалами. Из определения ординалов из α следует, что множество β транзитивно и все его элементы транзитивны, следовательно множество α ординал. Очевидно из определения, что α предельный ординал. Действительно, если бы ординал α был непредельным, то есть $\alpha = \gamma + 1$. Тогда из определения α элемент γ лежит в α и является непредельным и элементом в A. Но по свойству множества A в таком случае и α лежит в A и, следовательно, лежит в α. А это невозможно по Аксиоме фундируемости. Таким образом ординал α состоит только из непредельных ординалов, а сам предельный. Это и есть искомый ординал ω, состоящий из натуральных чисел в нашем теоретико-множественном универсуме.

Предложение 2. Для любого ординала α существует единственный предельный ординал γ и $n \geq 0$ — натуральное число такие, что $\alpha = \gamma + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}} = \gamma + n$.

Доказательство. Докажем наше утверждение ординальной индукцией. Пусть для любого ординала меньшего α наше утверждение верно. Покажем, что оно верно и для α. Если α предельный ординал, то $\gamma = \alpha$ и $n = 0$. Единственность в этом случае очевидна. Если α непредельный ординал, то существует ординал γ такой, что $\alpha = \gamma + 1$. Для ординала γ по индукционному предположению существует единственные предельный ординал γ_0 и натуральное число n такие, что $\gamma = \gamma_0 + n$. В таком случае $\alpha = \gamma + 1 = (\gamma_0 + n) + 1 = \gamma_0 + (n + 1)$. Докажем единственность. Пусть $\alpha = \gamma_1 + m$. Так как α непредельный ординал, то $m \neq 0$. Тогда $\alpha = (\gamma_1 + (m - 1)) + 1$. Отсюда следует из того, что прибавление единицы определяет следующий за данным ординалом ординал, что $\gamma_0 = (\gamma_1 + (m - 1))$, но тогда по индукционному условию $\gamma_0 = \gamma_1$ и $m - 1 = n$. Предложение доказано.

Определим теперь по ординальной индукции по β сумму двух ординалов $\alpha + \beta$. Мы предполагаем, что такая сумма $\alpha + \gamma$ определена для всех ординалов $\gamma < \beta$. Определим теперь $\alpha + \beta$.

Если $\beta = 0$, $\alpha + 0 \leftrightharpoons \alpha$.

Если $\beta = \delta + 1$, то полагаем $\alpha + \beta \rightleftharpoons (\alpha + \delta) + 1$.

Если γ — предельный ординал, то определим $\alpha + \gamma \rightleftharpoons \bigcup\limits_{\delta \in \gamma} (\alpha + \delta)$. Заметим, что объединение любого множества ординалов всегда снова будет ординалом.

Таким образом сумма ординалов определена. Заметим, что ординальной индукцией мы можем легко доказать ряд свойств сложения типа ассоциативности и порядковых. Заметим, что не все свойства справедливые на натуральных числах справедливы и для ординалов. Очевидно, что уже коммутативности мы не имеем. Так для наименьшего ненулевого предельного ординала ω ы имеем $1+\omega=\omega\neq\omega+1$.

Предложение 3. Для любых ординалов α, β и γ из $\alpha<\beta$ следует, что $\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$ и $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$.

Доказательство. Как было указано выше, воспользуемся вновь ординальной индукцией. Будем доказывать ординальной индукцией по β,что из $\alpha<\beta$ следует, что $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$. Пусть β ординал и для всех $\gamma\in\beta$ предложение справедливо.

Если β непредельный ординал, то $\beta=\delta+1$. В таком случае $\alpha<\delta$ или $\alpha=\delta$. В первом случае по индуктивному предположению $\gamma+\alpha<\gamma+\delta$. Но $(\gamma+\delta)+1=\gamma+(\delta+1)$. Отсюда сразу же следует, что $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$. В случае $\alpha=\delta$ заключение очевидно.

Если β предельный ординал, то из неравенства следует, что $\beta>0$. Из определения $\gamma+\beta=\bigcup\limits_{\delta<\beta}(\gamma+\delta)$. Следовательно, $\gamma+\alpha\in\gamma+\beta$ и утверждение доказано.

Докажем теперь, что из $\alpha<\beta$ следует, что $\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$. Это утверждение доказывается ординальной индукцией по γ аналогично предыдущему случаю.

Определим теперь произведение ординалов $\alpha\cdot\beta$.

Мы определим $\alpha\cdot 0\rightleftharpoons 0$. Для непредельного $\gamma=\delta+1$ определим $\alpha\cdot(\gamma+1)\leftrightharpoons\alpha\cdot\gamma+\alpha$.

Если β предельный ординал, то полагаем $\alpha\cdot\beta\rightleftharpoons\bigcup\limits_{\delta<\beta}\alpha\cdot\delta$.

Таким образом произведение по ординальной индукции определено для любых ординалов.

Предложение 4. Для любых ординалов α, β, γ из неравенства $\alpha < \beta$ следует, что $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$, если $\gamma \neq 0$, и $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

Доказательство аналогично предложению 3.

Определение суммы и произведения ординалов легко описать через операции над вполне упорядоченными множествами. Сумма определяет порядок в котором основное множество состоит из объединения непересекающихся основных множеств, а порядок внутри множеств тот же какой и был на этих множествах, а любой элемент второго множества больше любого элемента из первого множества.

Для определения произведения $\langle A, \leq_P\rangle \times \langle B, \leq_Q\rangle$ берем декартово произведение основных множеств $B \times A$ данных упорядоченных множеств, а чтобы сравнить (b, a) и (b', a') из , используем лексикографический порядок. Сначала сравниваем по элементам второго множества, а затем если они совпадают, то по элементам первого множества, то есть $(b, a) \leq_{P\times Q} (b', a')$, если $b <_Q b'$ или $b = b' \wedge a \leq_P a'$.

Аналогично может быть определено индуктивно и возведение в степень α^β.

Определим $\alpha^0 \rightleftharpoons 1$, если $\alpha \neq 0$.

Для непредельного ординала полагаем $\alpha^{\gamma+1} \rightleftharpoons \alpha^\gamma \cdot \alpha$.

Для предельного ординала $\beta > 0$ полагаем $\alpha^\beta \leftrightharpoons \bigcup\limits_{\delta<\beta} \alpha^\delta$.

Аналогично может быть доказана монотонность для степени.

Предложение 5. Для любых ординалов α, β, γ при $\alpha > 1$ из $\gamma < \beta$ следует $\alpha^\gamma < \alpha^\beta$.

L4

Лекция 4. Мощности множеств.

Мощности множеств.

Определим теперь сравнимость множеств по числу элементов. В конечном случае мы можем легко сравнить два множества по числу элементов в них. Будем брать из каждого множества по одному элементу до тех пор пока хотя бы в одном из них не останется элементов. Если при этом в обоих множествах не останется элементов, то у них одно и тоже число элементов, если же в одном из них еще останутся элементы, то оно больше. Таким образом, если есть два множества A и B, у них одинаковое число элементов, если мы можем установить между ними соответствие. Если в множестве A меньше элементов чем в B, то устанавливая соответствие из A и B, мы исчерпаем все элементы из A, а в B элементы еще останутся.

Теперь мы можем распространить это отношение сравнимости и на произвольные множества. Мы будем говорить, что два множества A и B равномощны, если существует функция f, устанавливающая взаимнооднозначное соответствие между A и B, то есть $f\colon A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$. В этом случае будем обозначать равномощность следующим сокращением: $|A| = |B|$. Мы будем говорить, что мощность множества A меньше или равна мощности B ($|A| \leq |B|$), если существует функция f, устанавливающая взаимнооднозначное соответствие между A и подмножеством множества B, то есть существует разнозначная функция f из A в B. Мы будем писать в этом случае $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$. Заметим, что для определенных отношений на множествах выполняются следующие свойства.

1. Рефлексивность: $|A| = |B|$ и $|A| \leq |B|$.

2. Симметричность: Если $|A| = |B|$, то $|B| = |C|$.
3. Транзитивность: Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, то $|A| \leq |B|$ и,
   если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.
4. Если $|A| = |B|$, то $|A| \leq |B|$, то $|B| \leq |A|$.

Покажем вначале, что определение равномощности и условие взаимной вложимости множеств в друг друга эквивалентны. То есть эти определения соответствуют нашей интуиции о сравнимости количества элементов.

Теорема Кантора-Бернштейна. Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

Доказательство. Из условий теоремы $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$ следует, что существуют разнозначные функции f и g такие, что

$f\colon A \xrightarrow{1-1} B$ и

$g\colon B \xrightarrow{1-1} A$.

Определим следующую последовательность подмножеств множества A:

$A_0 \rightleftharpoons A$, $A_1 = g(B)$. А дальше по индукции определяем для любого $n \geq 0$ множество $A_{n+2} = g(f(A_n))$.

Легко видеть из определения, что $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2$. Отсюда индукцией по n мы получаем, что при любом n выполнены включения $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq A_{n+2}$. Мы получили убывающую цепочку подмножества. Определим теперь множества $M_n \rightleftharpoons A_{n+1} \setminus A_n$ и множество $M_\infty \rightleftharpoons \bigcap_{n \in N} A_n$. тогда $A_{n+1} = g(f(A_{n-1}))$, а $A_{n+2} = g(f(A_n))$. Заметим, что из убывания последовательности элементов $A_0 \supseteq A_1 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq ...$ мы получаем, что для любых элементов $i, j \in N \cup \{\infty\}$, если $i \neq j$, то $M_i \cap M_j = \emptyset$ и $M_\infty \cup \bigcup_{n \in N} M_n = A$.

Теперь остается только построить взаимнооднозначное отображение $h\colon A \to A_1$ на множество A_1. Так как функция g взаимнооднозначно отображает множество B на A_1, то обратная g^{-1} определяет взаимнооднозначное отображение A_1 на B. И в этом случае композиция $h \circ g^{-1}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между A и B. Определим теперь функцию h.

Для любого элемента $a \in A$ определим значение $h(a)$ следующим образом:

$$h(a) = \begin{cases} a, \text{ если } a \in M_\infty \cup \bigcup\limits_{i\geq 0} M_{2i+1}, \\ \\ g(f(a)), \text{ если } a \in M_{2i}, i \geq 0. \end{cases}$$

Сначала поймем, что $h\colon A \to A_1$. Действительно из убывания последовательности $A_0 \supseteq A_1 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq ...$ сразу следует, что для $a \in M_\infty \cup \bigcup\limits_{i\geq 0} M_{2i+1}$ значение $h(a)$ лежит в A_1. Если же $a \in M_{2i}$ для $i \geq 0$, то $a \in A_{2i} \wedge h(a) = g(f(a))$, но $A_{2i+2} = g(f(A_{2i}))$. Следовательно, $h(a) \in A_{2i+2} \subseteq A_1$.

Теперь нужно понять, что это взаимооднозначное отображение A на A_1. Прежде всего заметим, что функция h отображает взаимнооднозначно множество M_{2i} на M_{2i+2}, то есть

$$M_{2i+2} = h(M_{2i})$$

и функция h разнозначна на множестве M_{2i}. Действительно, функция h совпадает с функцией $f \circ g$ на множестве M_{2i}, которая разнозначна, как композиция разнозначных. Из определения последовательности множеств мы имеем также, что

$$A_{2i+2} = gf(A_{2i})$$

и

$$A_{2i+1} = gf(A_{2i-1})$$

. Отсюда и из разнозначности композиции следует, что $f \circ g$ отображает взаимнооднозначно множество M_{2i} на M_{2i+2}. Из совпадения функций h и $f \circ g$ на множестве M_{2i} следует требуемое условие. Так как для любых элементов $i, j \in N \cup \{\infty\}$, если $i \neq j$, то $M_i \cap M_j = \emptyset$ и $M_\infty \cup \bigcup_{n\in N} M_n = A$, то функция h разнозначно. Сюръективность функции h тривиально следует из определения h и равенства

$$M_{2i+2} = h(M_{2i})$$

для $i \in N$. Теорема доказана.

Докажем теперь, что для любого множества найдется множество строго большей мощности.

Теорема Кантора. Для любого множества X, мощность этого множества строго меньше мощности его множества всех подмножеств $\mathcal{P}(X)$, то есть $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Доказательство. Покажем вначале, что $X \to \mathcal{P}(X)$. Определим вложение f из X в $\mathcal{P}(X)$. Определим для любого $a \in X$ $f(a) \rightleftharpoons \{a\}$. Ясно, что эта функция разнозначно отображает множество X в $\mathcal{P}(X)$ и $X \to \mathcal{P}(X)$.

Допустим, что $|X| = |\mathcal{P}(x)|$, тогда $\exists h\colon \mathcal{P}(x) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} X$. Рассмотрим множество $Y = \{x \in X \mid x \notin h^{-1}(x)\}$.

Каждый элемент $x \in X$ является образом какого–то элемента из $\mathcal{P}(X)$, $Y \subseteq X \wedge Y \in \mathcal{P}(X)$.

Пусть $h(Y) = x_0 \in X$. Для элемента x_0 возможны следующие две возможности:

1) $x_0 \in Y$,
2) $x_0 \notin Y$.

Рассмотрим теперь обе эти возможности:

1) если $x_0 \in Y \overset{df}{\Longrightarrow} x_0 \notin h^{-1}(x_0) = Y$ — противоречие;
2) если $x_0 \notin Y \overset{df}{\Longrightarrow} Y = h^{-1}(x_0),\ x_0 \in Y$ — противоречие.

Значит, оба случая не возможны, и не существует функции, отображающей множество $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ на X.

На множестве ординалов у нас также определено сравнение по мощности. Назовем ординал α кардиналом, если он не равномощен никакому своему элементу, то есть это наименьший ординал данной мощности. Нетрудно понять, что вопрос о равномощности произвольного множества некоторому кардиналу равносилен вопросу о возможности вполне упорядочить это множество. Как мы увидим позднее теорема Цермело о вполне упорядоченности любого множества следует из аксиомы выбора, более того она ей эквивалентна.

Множество называется счетным, если его мощность совпадает с мощностью множества натуральных чисел. Ясно, что ординал, состоящий из натуральных чисел будет кардиналом. Так же как и все конечные ординалы. Множество конечно, если существует конечный ординал которому оно равномощно. Ординал называется конечным, если он непредельный и все его элементы непредельные ординалы. Заметим. что для любого бесконечного ординала α мощности α и $\alpha + 1$ совпадают. Множество называется бесконечным, если оно не конечно. Множество будет бесконечным, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству. Без аксиомы выбора мы можем показать, что мощность квадрата счетного множества так же счетна.Но для доказательства следующих свойств нам нужна аксиома выбора. Заметим также, что мощность бесконечного множества не изменяется при добавлении конечного числа элементов. Мощность счетного множества меньше мощности любого бесконечного множества. Назовем мощность множества всех подмножеств счетного множества континуальной. Гипотеза континуума о существовании промежуточной мощности между счетной и континуальной привлекала внимание многих логиков. Доказать или опровергнуть эту гипотезу не удается даже при наличии аксиомы выбора. Решение этой проблемы было получено К.Геделем и П.Коеном, установившим ее независимость от стандартной аксиоматики теории множеств.

Теорема о мощности квадрата (Следствие из теоремы Цермело). Если множество A бесконечно, то мощности A и A^2 совпадают.

Доказательство. В силу теоремы Цермело любое множество можно вполне упорядочить. Отсюда по теореме о каноническом вполне упорядоченном множестве любое множество равномощно некоторому ординалу. Из вполне упорядоченности ординалов следует, что для любого ординала существует равномощный ему кардинал. В таком случае, если теорема не верна, то найдется наименьший бесконечный кардинал α, для которого множества α и α^2 не равномощны. Заметим также, что в таком случае $|\alpha| < |\alpha^2|$. Однако, для любого бесконечного ординала $\delta < \alpha$ справедливо равенство $|\delta| = |\delta^2|$, а также $\delta+1 < \alpha$, так как α бесконечный кардинал. Рассмотрим множество пар $\alpha^2 = \{(\delta_1, \delta_2)|\delta_1 \in \alpha, \delta_2 \in \alpha\}$. Определим на этом множестве бинарное отношение $\preceq$ следующим образом: $(\delta_1, \delta_2) \preceq (\gamma_1, \gamma_2)$, если $\max\{\delta_1, \delta_2\} < \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, либо $\max\{\delta_1, \delta_2\} = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ и $\delta_1 \in \gamma_1 \vee (\delta_1 = \gamma_1 \wedge \delta_2 \leq \gamma_2$. Нетрудно заметить, что такое отношение $\preceq$ вполне упорядочивает множество α^2. Отображение f такое, что $f(\delta) = (\delta, \delta)$, сохраняет порядок и отображает монотонно и разнозначно $\langle \alpha, \leq_\epsilon \rangle$ в $\langle \alpha^2, \preceq \rangle$. Рассмотрим ординал β такой, что $\langle \alpha^2, \preceq \rangle$ и $\langle \beta, \leq_\epsilon \rangle$ изоморфны. Тогда по следствию из теоремы о монотонных отображениях мы получаем, что $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$. Из нашего предположения о выборе α следует, что первый случай невозможен, а из второй возможности следует, что $\langle \alpha, \leq_\epsilon \rangle$ изоморфно начальному отрезку из $\langle \alpha^2, \preceq \rangle$. Пусть (γ_1, γ_2) такой элемент из α^2, что определенный им начальный интервал изоморфен $\langle \alpha, \leq_\epsilon \rangle$. Пусть g функция задающая этот изоморфизм, а $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Ясно, что $\gamma \in \alpha$ и $(\gamma + 1) \in \alpha$. В таком случае функция g отображает множество α в $(\gamma+1)^2$. Это следует из определения порядка на α^2. Так как α бесконечно, то и $\gamma + 1$ бесконечное множество. Тогда по выбору α мы имеем равенство мощностей для $\gamma + 1$ и $(\gamma + 1)^2$. В таком случае получаем неравенства $|\alpha| \leq |(\gamma+1)^2| = |(\gamma+1)| < |\alpha|$, то есть

$|\alpha| < |\alpha|$. Полученное противоречие показывает, что наше предположение не верно и теорема доказана.